

# Vibrējoša objekta mijiedarbība ar fluīdu

Jānis Vība<sup>1</sup>, Daumants Vītols<sup>2</sup>, Semjons Cifanskis<sup>3</sup>, Vitālijs Beresņevičs<sup>4</sup>, Staņislavs Noskovs<sup>5</sup>,  
Vladimirs Jakuševičs<sup>6</sup>, <sup>1-6</sup>Rīgas Tehniskā universitātē

**Kopsavilkums.** Darbā aplūkota objektu kustība ar vibrāciju komponentēm tādos gadījumos, kad relatīvais ātrums ir ļoti mazs vai pat tāds, kas maina virzienu uz pretējo pusi, iekļaujot arī apstāšanās laika momentu. Mijiedarbības spēku noteikšanai Stoksa plūsmas apgabalā piedāvāts jauns modelis – ātruma pakāpes funkcija. Modeļa validācija parādīta divu brīvības pakāpju sistēmas kustībai ūdenī ar vibrāciju palīdzību.

**Atslēgas vārdi:** mijiedarbība fluīdos, Stoksa plūsma, vibrācijas.

## I. IEVADS

Ļoti lieli sasniegumi fluīdu mehānikā iegūti aviācijas, aero- un hidrotehnisko iekārtu dinamikas jomā. Tajā pašā laikā ir daudz jaunu tehnisku uzdevumu, kas jārisina. Viens no šādiem uzdevumiem ir robotizētu objektu vadības sintēze propulsijas (t. i., dzinējspēka) sistēmās, kur jāizmanto objektu elementu vibrācijas mijiedarbība ar apkārtējo fluīda vidi (gaisu, ūdeni). Šeit jāņem vērā kustības virziena izmaiņa neliela ātruma apgabalā, kad objekta virsbūves elementi (piemēram, spārni, aste, spuras) atrodas vibrācijas kustībā pret korpusu.

Modernajā tehnikā, lai vienkāršoti risinātu mijiedarbību problēmas starp šķidrums un cietu ķermeni, lieto spēka jēdzienu. Vārds „mijiedarbība” būtībā nozīmē spēkus vai momentus, kas iedarbojas uz ķermeni fluīda plūsmā. Tehnikā nav principiālas atšķirības starp plūsmas mijiedarbību ar nekustīgu objektu vai starp kustīga objekta mijiedarbību ar relatīvā mierā esošu fluīdu. Toties ir svarīgs jautājums par spiediena sadali uz ķermeņa virsmas. Tā kā šādos gadījumos nepieciešams risināt parciālus diferenciālvienādojumus pie dotajiem sākuma un robežu noteikumiem, tad ir divas iespējas uzdevumu analīzē: lietot aptuvenus tehniskus modeļus, lai iegūtu pārskatāmus, vienkāršus rezultātus; lietot precīzākas specializētas fluīdu dinamikas analīzes programmatūras (CFD).

Šajā darbā tiek apskatīta aerodinamisko spēku analīze, izmantojot klasiskās mehānikas teorēmu par fluīda un cietā objekta kustības daudzuma izmaiņu mehāniskajā sistēmā [1]–[4].

Spēku ērti sadalīt divās komponentēs: vilces (*Drag*) spēkā (darbojas plūsmas virzienā) un pacelšanas (*Lift*) spēkā (darbojas perpendikulāri plūsmai). Spēkus atrod šādi [5] un [6]:

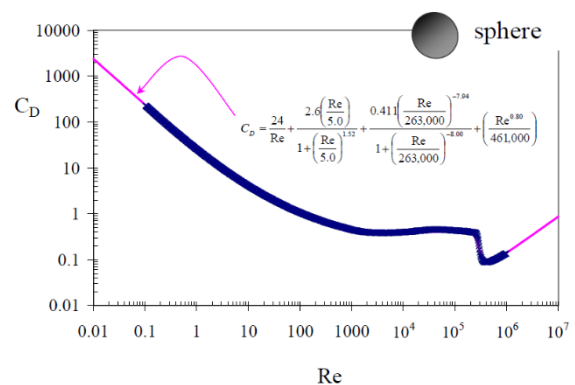
$$F_d = C_d \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2}, \quad F_l = C_l \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2}, \quad (1)$$

kur  $\rho$  – fluīda blīvums;  $V$  – plūsmas ātrums;  $S$  – reducētais šķēluma laukums;  $C_d$  un  $C_l$  – vilces un pacelšanas koeficienti. Abi koeficienti ir atkarīgi no ķermeņa formas, to orientācijas pret plūsmu un Reynoldsa skaitļa [5] un [6]:

$$Re = \frac{d \cdot V}{\nu}, \quad (2)$$

kur  $d$  – speciāls izmērs;  $\nu$  – kinētiskā viskozitāte. Piemērs vilkmes koeficienta atkarībai no Reynoldsa skaitļa  $Re$  sfēriska formas objektam parādīts 1. attēlā [7].

Abu iepriekšminēto koeficientu vērtības var noteikt eksperimentāli, lietojot vēja tuneļus (2. att.).



1. att. Vilces (*Drag*) koeficienta funkcija atkarībā no Reynoldsa skaitļa [7].



2. att. RTU Mehānikas institūta vēja tunelis *Armfield*.

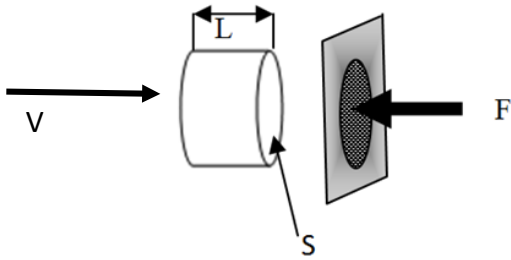
## II. VIENKĀRŠOTU TEORĒTISKO MODEĻU ANALĪZE

### A. Plakans šķērslis

Pirmais teorētiskais mēģinājums novērtēt spēku, kas darbojas pret plakni no perpendikulāras plūsmas, tika veikts tālā senatnē ar kinētiskās enerģijas teorēmas izmaiņas skaidrojumu. Šajā skaidrojumā tiek aplūkoti kinētiskās enerģijas zudumi plūsmas daļiņām, kuras triecas pret šķērslī (3. att.). Kinētiskā enerģija  $T$  ir (3):

$$T = \rho \cdot L \cdot S \cdot \frac{V^2}{2}, \quad (3)$$

kur  $L$  – plūsmas garums (2. att.).



3. att. Kinētiskās enerģijas modelis.

Attiecīgi teorijā tiek skaidrots, ka plaknes reakcijas spēks  $F$  aptur šo plūsmu un rada darbu  $A$ , kas ekvivalents spēka reizinājumam ar plūsmas garumu  $L$ :

$$A = L \cdot F. \quad (4)$$

No izteiksmēm (3) un (4) seko šāda spēka  $F$  atrašanās formula:

$$F = S \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{2}. \quad (5)$$

Formula (5) plaši pazīstama tehniskajā fluīdu dinamikā. Aplūkots spēka noteikšanas paņēmieni, līdzīgi kā formula (1), nav īsti korekti, jo nekustīga objekta reakcija nespēj radīt mehānisko darbu. Papildus jāatzīmē, ka fluīda plūsma pēc mijiedarbības ar šķērslī sadalās telpā, ko nespēj ievērot formula (5). Tāpēc mijiedarbības novērtēšanai labāk lietot šādu kustības daudzuma izmaiņas teorēmu kopējai fluīda plūsmai mehāniskajā sistēmā [1]:

$$m \cdot \bar{v}_1 - m \cdot \bar{v}_0 = \int_0^{\tau} \bar{F} \cdot dt. \quad (6)$$

Šeit  $\int_0^{\tau} \bar{F} \cdot dt = F \cdot \tau$ ,

kur  $\bar{v}_0, \bar{v}_1$  – plūsmas ātrumi pirms un pēc sadursmes;  $m = \rho \cdot L \cdot S$  – elementārā tilpuma masa;  $F$  – spēka vidējā vērtība;  $\tau = L/V$  – laika sprādis, kurā masa  $m$  triecas pret šķērslī.

Aplūkojot gadījumu, kad  $v_1 = 0$  un  $v_0 = V$ , iegūst:

$$F = S \cdot \rho \cdot V^2. \quad (7)$$

Vienīgā atšķirība starp formulām (5) un (7) ir koeficients „1/2”. Protams, lietojot formulu (5) vai (7), praksē netiks iegūti korekti rezultāti, jo papildus jālieto vilces (*Drag*) un pacelšanas (*Lift*) koeficienti, kā tas ir izteiksmēs (1).

### B. Slīps šķērslis

Tālāk tiek aplūkots vispārīgākais gadījums, kad plūsma iedarbojas uz slīpu plaknes šķērslī (4. att.). Tā kā analizē tiks

pielietota kustības daudzuma izmaiņas teorēma (6), tad elementāram laukumam  $dx \cdot dy$  var uzrakstīt šādu sakarību (3. att.):

$$dm \cdot \bar{V}_1 - dm \cdot \bar{V}_0 = d\bar{F} \cdot dt. \quad (8)$$

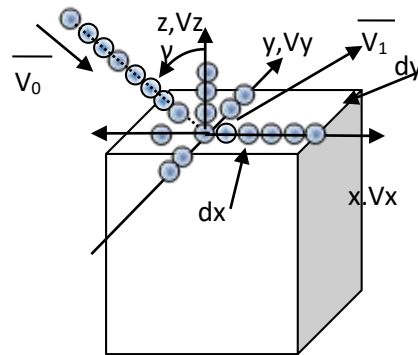
Šeit  $dm = \rho \cdot V_0 \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot \cos \gamma$ ,

kur  $\gamma$  – plūsmas leņķis pret normāli.

Ja analizē pieņem, ka plūsma ir simetriska un neatlec no šķērslī, tad ātruma  $V_1$  projekcijas ir:

$$V_x = k1 \cdot V_0 \cdot \sin \gamma, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0, \quad (9)$$

kur koeficients  $k1$  ietver robežu slāņu mijiedarbību (un arī viskozās slāpēšanas spēkus).



4. att. Plūsmas mijiedarbības shēma ar virsmas elementu  $dx, dy$ .

Tad var iegūt šādas mijiedarbības spēka projekcijas:

$$\begin{aligned} x: \quad dF_x &= \\ &= -\rho \cdot V_0^2 \cdot dx \cdot dy \cdot \cos \gamma \cdot \sin \gamma \cdot (1 - k1), \\ y: \quad dF_y &= 0, \\ z: \quad dF_z &= \rho \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \gamma \cdot dx \cdot dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Vienādojumi (10) var tikt izmantoti mijiedarbības spēka  $F$  komponentu noteikšanai. Sprotams, ka šie vienādojumi jāintegrē pa virsmas laukumu  $f = f(x, y, z)$ , turklāt leņķis  $\gamma$  arī var mainīties kā funkcija no  $x, y$ . Papildu ātrums  $V_0$  arī var būt laika vai fāzu koordinātu funkcija.

### C. Rotējoša plāksne

Aplūkojam konstanta platuma rotējošas plāksnes mijiedarbību ar nekustīgu fluīdu (5. att.). Plāksnei, rotējot ar leņķisko ātrumu  $\omega$ , ir šādas sakarības:

$$V_1 = \omega \cdot r, \quad V_0 = 0, \quad dm = \rho \cdot b \cdot dr \cdot r \cdot \omega \cdot dt.$$

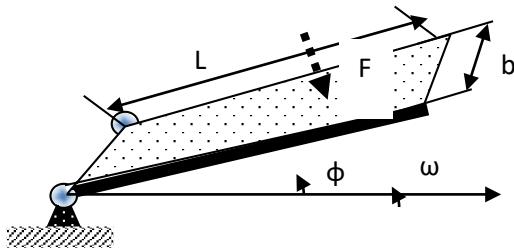
Spēka  $dF$  elementārais impulss  $dF \cdot dt$  uz laukumu  $b \cdot dr$  ir:

$$dF \cdot dt = \rho \cdot b \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot dt. \quad (11)$$

Kopējais spēks  $F$  un izkliedētās slodzes moments  $Mo(dF)$  ir:

$$F = -\int_0^L \rho \cdot b \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \text{sign}(\omega) = \frac{-\rho \cdot b \cdot \omega^2}{3} L^3 \cdot \text{sign}(\omega) . \quad (12)$$

$$Mo(dF) = -\int_0^L \rho \cdot b \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot r \cdot dr \cdot \text{sign}(\omega) = \frac{-\rho \cdot b \cdot \omega^2}{4} L^4 \cdot \text{sign}(\omega) . \quad (13)$$



5. att. Fluīdā rotējošas plāksnes shēma.

Tā kā kopējais spēks ir perpendikulārs plāksnei, tad tā projekcijas uz asīm var atrast šādi:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \sin \phi \cdot \text{sign}(\omega) , \\ F_y &= -F \cdot \cos \phi \cdot \text{sign}(\omega) . \end{aligned} \quad (14)$$

Šeit spēka virziens ir atkarīgs no rotācijas leņķiskā ātruma virziena  $\text{sign}(\omega)$  .

### III. AERODINAMISKAIS SPĒKS, JA IR MAZS REINOLDSA SKAITLIS

Šajā darbā papildus tika analizēta mijiedarbība mazu ātrumu (Reinoldsa skaitļa  $Re$ ) diapazonā, kad ātrums maina zīmi apstāšanās momentā (Stoksa plūsmā) [9].

Kā redzams 1. attēlā, koeficienta  $C_D$  logaritms mainās lineāri, sākot ar  $Re$  skaitļa logaritmu no 0,01. Tad attiecīgi seko, ka koeficienta  $C_D$  logaritma diapazonā no  $-0,01$  līdz  $+0,01$  nekas nav attēlots. Tāpēc ir priekšlikums šajā apgabalā pieņemt mijiedarbības spēka vērtību kā ātruma  $V$  pakāpes funkciju (15):

$$F1 = \frac{C1}{V^a} V^2 = C1 \cdot V^{(2-a)} , \quad (15)$$

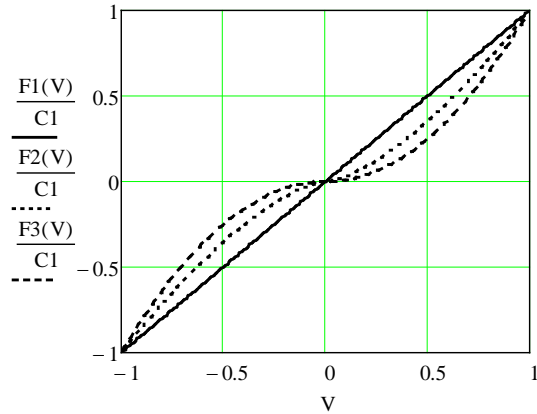
kur  $C1$  un  $a$  – konstantes. Tādā veidā maza  $Re$  skaitļa gadījumā šo formulu (15) var lietot formulas (1) vietā. Attiecīgi, ja ātruma vektors maina virzienu uz pretējo pusi, lietojama šāda sakarība:

$$F1 = -C1 \cdot |V^{(2-a)}| \cdot \text{sign}(V) . \quad (16)$$

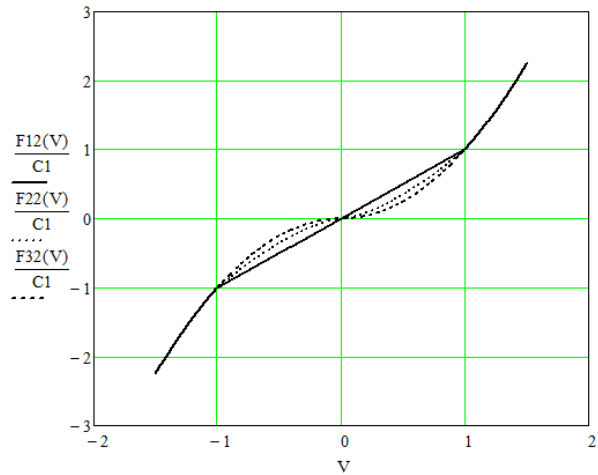
Funkcijas (16) grafiks redzams 6. attēlā, ja  $a$  vērtības ir dažādas. Jāatzīmē, ka visas funkcijas krusto punktus  $V = 0$ ;  $V = \pm 1$ . Tādā veidā negatīva un pozitīva vibrāciju ātruma diapazonā mijiedarbības spēku var izteikt ar sakarību:

$$F1 = -C1 \cdot |V^{2-a \cdot (0,5-0,5 \cdot \text{sign}(|V|)})}| \cdot \text{sign}(V) . \quad (17)$$

Funkcijas grafiskie attēli parādīti 7. attēlā. Komentējot šos grafikus, jāatzīmē, ka, pastāvot dažādiem pakāpes rādītājiem,  $a$  funkcijām (17) ir trīs kopēji punkti pie  $V = -1$ ,  $V = 0$  un  $V = +1$ .



6. att. Aerodinamiskais vibrāciju spēks, ja ir mazi Reinoldsa skaitļi  $Re$  un ātruma zīmes izmaiņas:  $F1$ , ja  $a = 1$ ;  $F2$ , ja  $a = 0,5$ ;  $F3$ , ja  $a = 0$ .



7. att. Vibrāciju mijiedarbības spēks visā svārstību kustības ātruma diapazonā:  $F12$ , ja  $a = 1$ ;  $F22$ , ja  $a = 0,5$ ;  $F32$ , ja  $a = 0$ .

### IV. DIVU BRĪVĪBAS PAKĀPJU SISTĒMAS MODELĒŠANA

Divu virzes kustībā esošu masu kustības shēma parādīta 8. attēlā. Kustības diferenciālvienādojumi ir šādi:

$$m1\ddot{x}1 = -C1(\dot{x}1)^2 \text{sign}(\dot{x}1) - c12(x1 - x2) - b12(\dot{x}1 - \dot{x}2) + P0 \sin(\omega t) - b1 \cdot \dot{x}1, \quad (18)$$

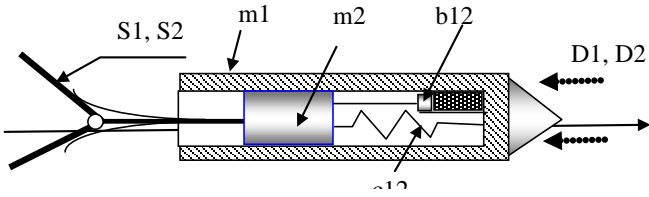
$$\begin{aligned} m2\ddot{x}2 = & \\ = -C0(1 - k \cdot \text{sign}(\dot{x}2)) & \left| \dot{x}2^{2-a(0,5-0,5 \cdot \text{sign}(|\dot{x}2|))} \right| \text{sign}(\dot{x}2) + \\ + c12(x1 - x2) + b12(\dot{x}1 - \dot{x}2) - & P0 \sin(\omega t) - b2 \cdot \dot{x}2, \end{aligned} \quad (19)$$

kur  $m1$ ,  $m2$  – masas;  $x1$ ,  $x2$ ,  $\dot{x}1$ ,  $\dot{x}2$ ,  $\ddot{x}1$ ,  $\ddot{x}2$  – masu pārvietojumi, ātrumi un paātrinājumi;  $C1$ ,  $C0$ ,  $c12$ ,  $b12$ ,  $P0$ ,  $\omega$ ,  $k$ ,  $a$  – konstantes;  $t$  – laiks. Kā vadības iedarbība tiek izmantota laukuma izmaiņa otrai masai šādā adaptīvā veidā [8]:

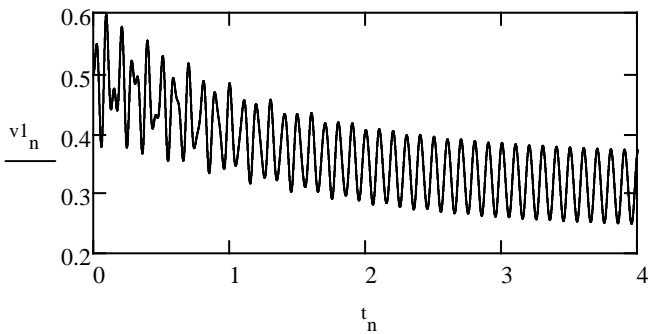
$$F = -C0(1 - k \cdot \text{sign}(\dot{x}2)). \quad (20)$$

Kustības grafiku piemēri parādīti 9.–15. attēlā.

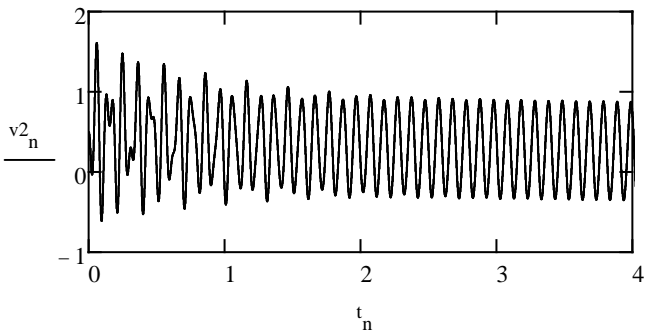
Saskaņā ar teoriju tika izgatavoti un eksperimentāli pārbaudīti nirstoši roboti *RR-10* un *RR-11*, kuru kustību vada laukuma adaptīvās izmaiņas mehānisms [8]. Robotu fotogrāfijas parādītas 16. un 17. attēlā.



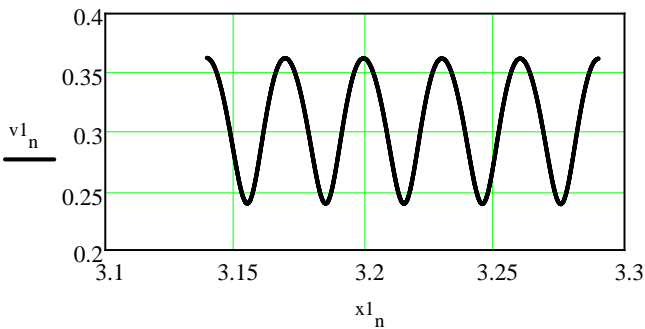
8. att. Divu brīvības pakāpju sistēmas modelis.



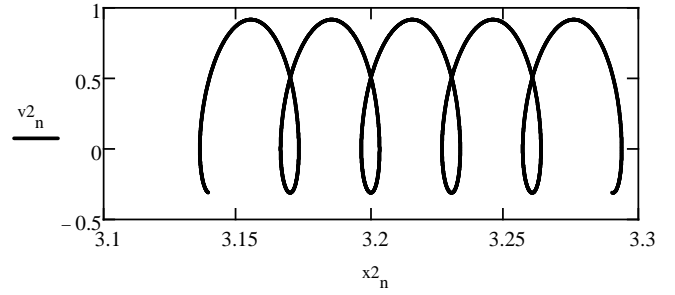
9. att. Masas  $m_1$  ātruma izmaiņas grafiks kustības sākumā.



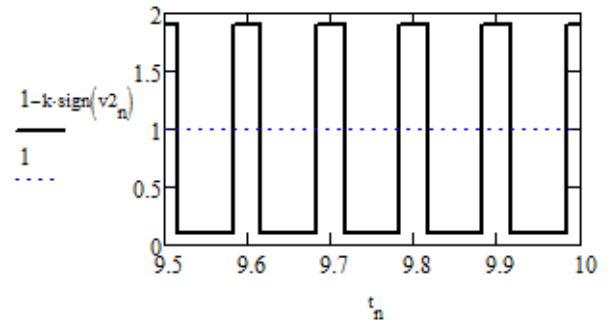
10. att. Masas  $m_2$  ātruma izmaiņas grafiks kustības sākumā.



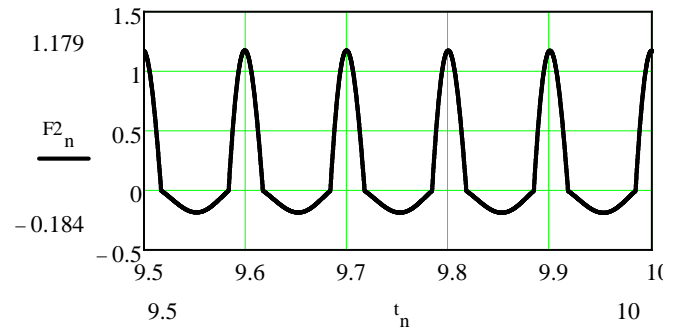
11. att. Masas  $m_1$  kustības attēls fāzu plaknē.



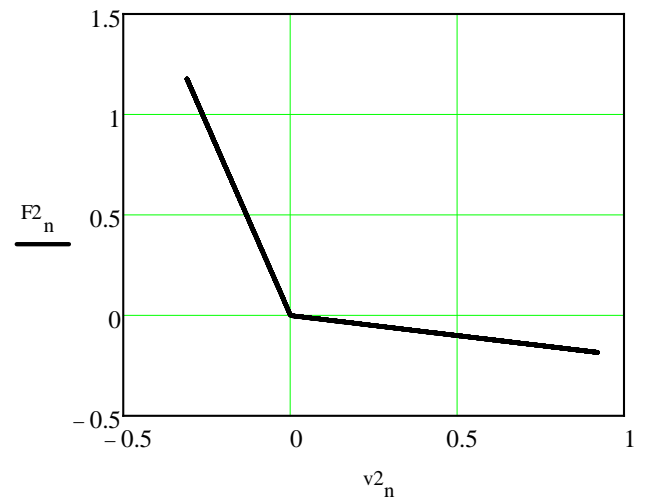
12. att. Masas  $m_2$  kustības attēls fāzu plaknē.



13. att. Vadības funkcijas attēls atkarībā no laika.



14. att. Propulsijas spēka grafiks kā laika funkcija.



15. att. Propulsijas spēka atkarība no kustības ātruma.



16. att. Nirstošs robots R10 pie lineāra baseina.



17. att. Nirstoša robota R11 kustība lineārā ūdens baseinā.

## V. NOBEIGUMS

Darbā iegūtas vienkāršotas sakarības vibrējoša objekta mijiedarbības aprakstam ar fluīdu. Tās ļauj risināt kustības vadības sintēzes uzdevumus robotu tehnikā. Šim nolūkam piedāvāts aprakstīt kustības ātruma izmaiņas likumu ar pakāpes funkciju. Attiecīgi sintēzes piemērā kustības ierosināšanai izmantota iekšējo spēku harmoniska ierosme. Darbā iegūtie rezultāti izmantojami nirstošu robotu kustības piedziņai, kā arī gaisā lidojošu vibrējošu spārnu tipa robotu aprēķinos.

**Janis Viba, Daumants Vitols, Semyon Tsyfansky, Vitaly Beresnevich, Stanislavs Noskovs, Vladimir Jakushevich. A vibrating object interaction with fluids**  
The paper deals with the motion analysis of the objects with vibration components in cases where the relative velocity is very small, or even in the case when velocity direction is changed on opposite, including stopping time moments. The area of velocities practically has not been studied in scientific works. This is primarily caused by the fact that experimentally it is difficult to identify the forces in a low-velocity region or in time moments corresponding to changing the flow in the opposite direction. A new model in the form of a velocity power function for determination of interaction forces within the Stokes flow area is proposed. The theory is validated in application to the motion in water of the two degrees of freedom system under the vibration excitation. The simplified relationships describing the interaction of a vibrating object with the fluid are obtained. These interconnections may be used to solve the motion control tasks in synthesis of robotic systems. For this purpose, it is proposed to switch over the law for the speed of the interaction described by a power function. In the presented example of synthesis, the system motion is excited by the antiphase internal harmonic force. The results of research can be used to develop drive mechanisms of diving robots, as well to perform calculations of the robots flying in air with the aid of vibrating wings. The information on diving robots R10 and R11 developed in RTU on the base of the proposed theory is presented.

## LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Bedford, A. M., Fowler, W. L. *Engineering Mechanics; Statics & Dynamics*. 4th ed. Pearson Education, Inc. USA. 2005. 622 p.
2. Loyciansky, L. G.: *Fluid mechanics*. Drofa, Moscow, 2003, 840 p.
3. Sedov, L. I. *Planar problems of hydro- and aerodynamics*. Moscow: Nauka; 1966, 448 p.
4. Panovko, Y. G. *Introduction to mechanical oscillations theory*. S. Petersburg: Nauka, 1989, 252 p.
5. Clancy, L. J. *Aerodynamics*. Publisher by Pitman. New York. London, 1975. 610 p.
6. Morrison, F. A. *An Introduction to Fluid Mechanics*. New York: Cambridge University Press, 2013. 625 p.
7. Morrison, F. A. Data Correlation for Drag Coefficient for Sphere. Department of Chemical Engineering, Michigan Technological University, Houghton, MI, Pieejams: <http://www.chem.mtu.edu/~fmorriso/DataCorrelationForSphereDrag2013>.
8. Viba, J. *Optimisation and synthesis of vibro impact systems*. Riga: Zinatne, 1988. 253 p.
9. Payne, L. E. and Pell, W. H. The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 7, Issue 04, April, 1960, pp. 529–549.

**Janis Viba**, *Dr. habil. sc. ing.*, Professor, Institute of Mechanics, Riga Technical University. Scientific directions: theoretical mechanics, dynamics of machines. Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 6708 9473; E-mail: janis.viba@rtu.lv

**Daumants Vitols**, Master of science in Civil Engineering. Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 29206228; E-mail: daumants@nordicpartners.lv

**Semyon Tsyfansky**, *Dr. habil. sc. ing.*, Professor, Institute of Mechanics, Riga Technical University. Scientific directions: nonlinear dynamics of electromechanical systems. Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 6708 9469; E-mail: semjons.cifanskis@rtu.lv

**Vitaly Beresnevich**, *Dr. sc. ing.*, Assoc. Professor, Institute of Mechanics, Riga Technical University. Scientific directions: mechanical engineering. Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Tel: +371 6708 9469; E-mail: vitalijs.beresnevics@rtu.lv

**Stanislavs Noskovs**, Master of science in Mechanical Engineering. Scientific directions: engineering mechanics. Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 259062214; E-mail: frant1c@inbox.lv

**Vladimir Jakushevich**, M. sc. ing, scientific assistant, Institute of Mechanics, Riga Technical University. Scientific directions: nonlinear dynamics of electromechanical systems. Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 6708 9469; E-mail: vladimirs.jakusevics@rtu.lv