

Ritca metodes precizitātes novērtēšana gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķinos

Vladimirs Gonca¹, Jurijs Švabs²

^{1,2}Rīgas Tehniskā universitāte

Kopsavilkums. Visi analītiskie aprēķini gumijas izstrādājumiem ir veikti ar tuvinātām metodēm. Šajā rakstā aplūkota metode, kas ļauj novērtēt ar Ritca metodes palīdzību iegūta tuvināta risinājuma precizitāti. Darbā tika atrasti viena uzdevuma divi tuvināti risinājumi: pirmais risinājums iegūts ar Ritca metodes palīdzību [1], [3], [6] gumijas amortizatoram ar nosēdes iztrūkumu, otrs risinājums iegūts ar nosēdes pārpalikumu, izmantojot Slobodjanska [1] un [2] izstrādāto funkcionāli. Precīzs rezultāts atrodas starp šiem diviem risinājumiem. Metodes galvenā priekšrocība: iespēja novērtēt kļūdu, ar kādu atrasts tuvināts risinājums, neatsakoties no Ritca metodes. Darbā iegūts formas koeficienta grafiks risinājumam ar nosēdes iztrūkumu un ar pārpalikumu. Izmantojot šo grafiku, viegli iegūt sakarību „spēks-nosēde” gumijas amortizatoriem ar dažādiem ģeometriskiem izmēriem.

Atslēgas vārdi: amortizators, elastomērs, formas koeficients, spēks-nosēde, spiede.

I. IEVADS

Elastomēra materiāli tiek izmantoti tehnikā un celtniecībā, bet to izmantošanas sfēra un iespējas nemitīgi papildinās, kā arī palielinās to īpatsvars un nozīme mūsdienu tehnoloģijās un konstrukcijās. Attīstoties mašīnbūvei un ražošanas un celtniecības tehnoloģijām, tiek pieprasīta arī elastomēra izstrādājumu attīstība, augsti precīzu formu izmantošana, kvalitātes uzlabošana. Mūsdienu apstākļos strauji pieaugušas prasības pēc produkcijas kvalitātes un izgatavošanas precizitātes ievērošanas ražošanas tehnoloģijās. Elastomēru materiāliem piemīt labas tehnoloģiskās īpašības, kas ļauj tos izmantot ļoti plašā iespēju diapazonā, kā arī unikālās konstrukcijās. Tiem piemīt augsta amortizācijas spējas, vāja saspiežamība, augsta noturība pret ķīmiskajiem un fizikālajiem faktoriem, spēja uzņemt lielas deformācijas, augsta elastība. Šīs īpašības padara gumijas tehniskos izstrādājumus neaizvietojamus mašīnbūves, aparātbūves un celtniecības konstrukcijās. Lai labāk izmantotu elastomēra materiālu iespējas, nepieciešams saprast un analizēt slogojuma un nostiprināšanas veidus, ievērojot šo materiālu īpašības.

Viens no svarīgākajiem amortizatora integrāliem raksturojumiem ir stingums. Amortizatora stingumu statiskā slodzē raksturo sakarība „spēks-deformācija”. Visi analītiskie aprēķini gumijas izstrādājumiem ir veikti ar tuvinātām metodēm. Neeksistē precīza analītiska metode gumijas izstrādājumu aprēķiniem. Izmantojot tuvinātas metodes, ļoti svarīgi ir zināt, ar kādu kļūdu atrasts risinājums, kā arī – vai reālais risinājums ir lielāks vai mazāks par iegūto. Viena no plašāk izplatītām tuvinātajām metodēm gumijas aprēķiniem ir Ritca metode. Šajā rakstā aplūkota metode, kas ļauj novērtēt ar

Ritca metodi iegūtā tuvinātā risinājuma precizitāti. Metodes galvenā priekšrocība: novērtēt tuvinātā risinājuma kļūdu, neatsakoties no Ritca metodes. Aplūkotā divpusējās tuvināšanas metode ir īpaši efektīva pie integrālās sakarības „spēks-nosēde” precizitātes vērtēšanas.

II. METODES BŪTĪBA

Ir kāds gumijas amortizators, kas noslogots ar spēku P , un šī amortizatora nosēde $\Delta = \Delta(P)$.

Integrālo raksturojumu „spēks-nosēde” meklē, izmantojot Ritca metodi ar funkcionāli [1,3,6]:

$$J(u_i, s) = G \int_V [\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \varepsilon_{ij} - \frac{9}{4} \frac{(1-2\mu)}{(1+\mu)^2} s^2] dV - \int_{\Omega} P_i u_i d\Omega, \quad (1)$$

kur s – hidrostatiskā spiediena funkcija;

G – bīdes modulis;

μ – Puasona koeficients;

ε_{ij} – deformācija;

P_i – ārējie spēki;

u_i – pārvietojumu funkcija;

Ω – ķermeņa virsma;

V – ķermeņa tilpums.

Minimizējot funkcionāli $J(u_i, s)$, tiek iegūta amortizatora nosēdes sakarība $\Delta^*(P)$; šī sakarība ir ar nosēdes iztrūkumu [3]:

$$\min J(u_i, s) \rightarrow \Delta^*(P) \leq \Delta^0(P), \quad (2)$$

kur Δ^* – nosēde, kas tiek aprēķināta, izmantojot Ritca metodi; Δ^0 – īstā nosēdes vērtība, precīzs risinājums.

Zināms, ka iegūtā nosēdes vērtība ir mazāka par īsto nosēdes vērtību, bet jautājums ir, cik tālu no īstā risinājuma tā atrodas. Šajā darbā tiek piedāvāts atrast nosēdi Δ_1^* , kas ir lielāka par īsto, tad var iegūt robežas, kurās ir precīzais risinājums.

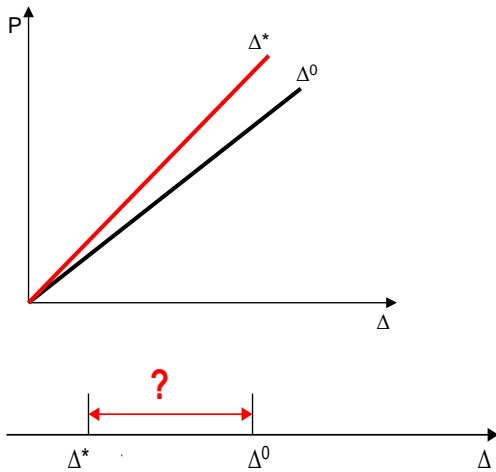
Saskaņā ar [1] un [2] tiek pierakstīts funkcionālis $J_1(u_{1i}, s_1, u_i, s)$, kuram ir minimālas īpašības un:

$$J_1(u_{1i}, s_1, u_i, s) \leq J(u_i, s), \quad (3)$$

kur $J(u_i, s)$ – pilnas potenciālās enerģijas funkcionālis.

Ja ir zināms precīzs risinājums, tad viegli var pierakstīt:

$J(u_i, s) = J(\Delta, P)$, kas sasniedz minimumu, kad $\Delta = \Delta^0(P)$.



1. att. Sakarība „spēks-nosēde” gumijas amortizatoram: Δ^* – risinājums, kas iegūts ar Ritca metodes palīdzību; Δ^0 – precīzs risinājums (eksperiments).

Tad saskaņā ar (3):

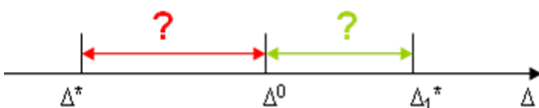
$$J_1(\Delta, P) \leq J(\Delta, P) \tag{4}$$

jebkuram Δ .

Dotajā gadījumā, no (3) un (4) seko, ka, minimizējot funkcionāli $J_1(u_{1i}, s_1, u_i, s)$, iegūst nosēdes $\Delta_1^*(P)$ lielumu, kas ir lielāks par precīzo lielumu:

$$\min J_1(u_{1i}, s_1, u_i, s) \rightarrow \Delta_1^*(P) \geq \Delta^0(P) \tag{5}$$

Tā kā nosēde, kas atrasta ar Ritca metodes palīdzību, ir ar iztrūkumu, bet šī tikko iegūtā – ar pārpalikumu, būs zināmas robežas, kurās atrodas precīzs risinājums.



2. att. Gumijas amortizatora nosēde: Δ^* – risinājums, kas iegūts ar Ritca metodes palīdzību; Δ^0 – precīzs risinājums (eksperiments); Δ_1^* – risinājums, kas iegūts, minimizējot funkcionāli $J_1(u_{1i}, s_1, u_i, s)$.

Funkcionāļa $J_1(u_{1i}, s_1, u_i, s)$ izveidošana aplūkota [1].

$$J_1(u_{1i}, u_i) = \int_V \left\{ \begin{aligned} & \left[U_1(u_{1i}) + U_2(u_i) + \right. \\ & \left. + (u_i - u_{1i}) L_i U_1(u_{1i}) \right] + \\ & \left. + [(u_i - u_{1i}) B_j U_1(u_{1i})]_{,j} \right\} dV. \tag{6} \end{aligned} \right.$$

Funkcija u_i ir jau zināma, ja sakarība „spēks–nosēde” ir atrasta ar Ritca metodi. Funkcija u_{1i} jāizvēlas tā, lai:

- nevienādībai būtu minimāla vērtība, ja izvēlēta funkcija u_i ;
- Eilera vienādojumu sistēma, ko apraksta funkcionālis $J_1(u_{1i}, u_i)$, būtu ekvivalenta aplūkotajai robežproblēmai:

$$\begin{aligned} L_i U(u_i, s) &= 0 \in V; \\ B_j U(u_i, s)_j + \Phi(u_i)_{,i} &= 0 \in F_\sigma; \\ u_i &= u_{0i} \in F_u. \end{aligned} \tag{7}$$

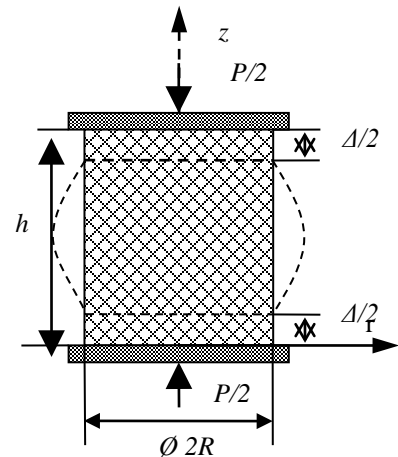
Tālāk tiek aplūkots Ritca metodes precizitātes novērtējums gumijas tehnisko izstrādājumu aprēķiniem. Šajā darbā kā piemērs ir apskatīta sakarības „spēks–nosēde” iegūšana pilnam cilindriskam amortizatoram (3. att.), kurš noslogots ar aksiālu spēku P (4. att.) ar kļūdas novērtējumu, kas iegūts ar Ritca metodes palīdzību.



3. att. Pilnais cilindriskais amortizators.

Tiek pieņemts, ka amortizatora ģeometrija ļauj neņemt vērā gumijas kārtas vājo saspiežamību (t.i., pieņem $\mu = 0,5$). Šajā gadījumā Ritca metode ir ekvivalenta funkcionāļa minimizēšanai [3]:

$$J(u_i, s) = G \int_V [\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + s \cdot u_{i,i}] dV - P \Delta \tag{8}$$



4. att. Amortizatora aprēķina shēma.

ar galvenajiem robežnosacījumiem:

$$\begin{aligned} u(r_1 \pm \frac{h}{2}) &= 0, \\ w(r_1 \pm \frac{h}{2}) &= \pm \frac{\Delta}{2}, \end{aligned} \tag{9}$$

kur $u(r, z)$ – pārvietojumi gar r asi;
 $w(r, z)$ – pārvietojumi gar z asi.

III. FUNKCIONĀLA ABPUSĒJAS NOVĒRTĒŠANAS METODE

Tiek pieņemts, ka pārvietojuma funkcijas ir:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} r f_{,z}(z), \\ w &= f(z), \\ u_{i,i} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Lai atrastu funkciju $f(z)$, jāminimizē funkcionālis (11). Ja ir izpildāms nesaspiežamības nosacījums, tad funkcionāli $J(u_i, s)$ var pierakstīt:

$$J(f(z)) = GF \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{3}{2} f^2, z + \frac{R^2}{16} f^2, zz + \frac{P}{GF} f, z \right) dz \tag{11}$$

ar nosacījumu (12):

$$\begin{aligned} f_{,z} \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= 0 \\ f \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= \pm \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Izmantojot [2], ieraksta jaunu kvadrātisku funkciju (13):

$$\begin{aligned} U_1(u_i) &= \frac{3}{2} \alpha \cdot f_{1,z}^2, \\ U_2(u_i) &= \frac{3}{2} (1-\alpha) f^2, z + \frac{R^2}{16} f^2, zz + \frac{P}{GF} f, z, \end{aligned} \tag{13}$$

kur $f_1(z)$ ir nezināma funkcija un $0 < \alpha < 1$. Vienādojumu funkcijai $f_1(z)$ pieraksta, izmantojot (9):

$$3\alpha \cdot f_{1,z} + 3(1-\alpha) f, z - \frac{R^2}{8} f, zz + \frac{P}{GF} = 0. \tag{14}$$

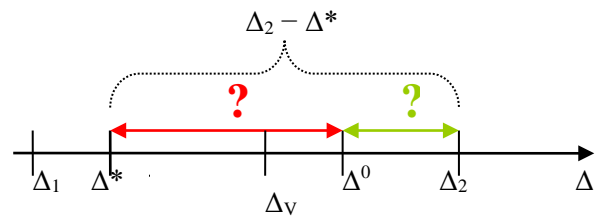
Lai atrastu sakarības „spēks-nosēde” „dakšu”, jāatrisina vienādojums (15):

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= \frac{Ph}{GF} \left(1 + \frac{\pi^2 \rho^2}{24} \right) \times \\ & \times \sqrt{1 \pm \frac{\pi^2 \left[3(1-\alpha) + \frac{2-\alpha}{8} \pi^2 \rho^2 + \frac{\pi^4 \rho^4}{192} \right] \left(1 - \frac{3\alpha}{\gamma_0} \right)}{24 + 2\pi^2 \rho^2 + \frac{\pi^4 \rho^4}{18}}, \\ & \times \frac{\pi^2 \left[\frac{3(1-\alpha)}{8} + (2-\alpha) \frac{\pi^2 \rho^2}{64} + \frac{\pi^4 \rho^4}{128 \cdot 12} \right]}{\pi^2 \left[\frac{3(1-\alpha)}{8} + (2-\alpha) \frac{\pi^2 \rho^2}{64} + \frac{\pi^4 \rho^4}{128 \cdot 12} \right]}, \end{aligned} \tag{15}$$

ievērojot nosacījumu $0 < \alpha < 1$. Pēc papildaprēķiniem koeficientu α var pieņemt 0,2104. Vienādojumam (15) ir divas saknes. Pirmā sakne Δ_1 ir mazāka par Δ^* , kas iegūta ar Rīta metodes palīdzību, tāpēc šī sakne turpmāk netiek izmantota. Otrā sakne Δ_2 ir lielāka par Δ^* (iegūta ar Rīta metodes palīdzību) un saskaņā ar (3)–(5) arī ir lielāka par Δ^0 (īstais nosēdes lielums, precīzs risinājums), kā rezultātā tiek iegūtas robežas, kur atrodas precīzais risinājums. Tad precīzas sakarības $\Delta^0(P)$ robežas ir:

$$\Delta_1(P) < \Delta^* < \Delta^0(P) < \Delta_2. \tag{16}$$

Grafiski tas parādīts 5. attēlā.



5. att. Nosēdes assis.

Tagad ir zināms, kādās robežās atrodas precīzs risinājums. Lai būtu tuvāk precīzam risinājumam, aprēķiniem var ņemt vidējo vērtību starp diviem risinājumiem, kas šajā darbā tiek apzīmēta ar Δ_v (17):

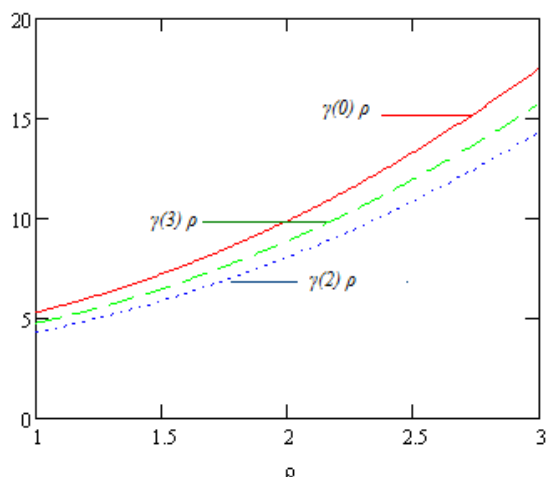
$$\Delta_v(P) = \frac{1}{2} (\Delta^* + \Delta_2). \tag{17}$$

Tomēr nav zināms, vai Δ_v ir lielāks vai mazāks par precīzu risinājumu. Tāpēc jābūt uzmanīgiem, izmantojot Δ_v aprēķiniem.

Lai vienkāršotu iegūto rezultātu izmantošanu, tiek aprēķināts katram gadījumam formas koeficients γ (18):

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \frac{Ph}{GF \gamma_0}, \quad \gamma_0 = 3.75 + 1.52 \rho^2, \\ \Delta_2 &= \frac{Ph}{GF \gamma_2}, \quad \gamma_2 = \frac{3.02 + 5.34 \rho^2 + 1.672 \rho^4}{1 + 1.34 \rho^2}, \\ \Delta_v &= \frac{1}{2} (\Delta^* + \Delta_2) = \frac{Ph}{GF \gamma_3}, \quad \gamma_3 = \frac{2\gamma_0 \gamma_2}{\gamma_0 + \gamma_2}, \\ \rho &= \frac{R}{h}. \end{aligned} \tag{18}$$

Formas koeficients atkarībā no amortizatora ģeometriskajiem izmēriem grafiski parādīts 6. attēlā.



6. att. Formas koeficientu grafiks.

IV. SECINĀJUMI

Izstrādātā metodika ļauj novērtēt ar Ritca metodes palīdzību iegūtā tuvinātā risinājuma precizitāti. Atrasti viena uzdevuma divi tuvināti risinājumi. Pirmais risinājums iegūts ar nosēdes iztrūkumu (ar Ritca metodes palīdzību), otrs – ar nosēdes pārpalikumu (izmantojot funkcionāli, ko izstrādājis Slobodjanskis). Precīzs risinājums atrodas starp šiem diviem risinājumiem. Metodes galvenā priekšrocība ir iespēja novērtēt kļūdu, ar kādu iegūts tuvināts risinājums, neatsakoties no Ritca metodes. Aplūkotā divpusējas tuvināšanas metode ir īpaši efektīva integrālās sakarības „spēks-nosēde” precizitātes vērtēšanā. Darbā piedāvātais risinājums pierāda iespēju

izmantot funkcionāla divpusēju novērtējumu, lai noteiktu tuvinātā risinājuma precizitāti. Darbā ir iegūts formas koeficienta grafiks risinājumam ar iztrūkumu un ar pārpalikumu. Izmantojot šo grafiku, viegli iegūt sakarību „spēks-nosēde” gumijas amortizatoriem ar dažādiem ģeometriskiem izmēriem.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. Москва: Наука, 1970.
2. Слободянский М.Г. *О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума*. ДАН, т. 91, № 4, 1953.
3. Лавендел, Э. *Расчеты резинотехнических изделий*. Москва, 1976. 130 с.
4. Дымников С.И., Лавендел Э.Э., Павловскис А.М. и др. *Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов*. Рига: Зинатне, 1980.
5. Лейканд, Н., Лавендел, Э., Горелик, Б. и др. Экспериментальное исследование констант упругости резин 2959 и 51–1673. В: *Всес.науч.-техн. конференция по методике расчета изделий из высокоэластичных материалов*. Рига, 1980. с. 140–153.
6. Гонца, В. Влияние слабой сжимаемости на решение задач теории упругости для несжимаемого материала. *Вопросы динамики и прочности*. Рига, 1970, вып. 20, с. 185–189.

Vladimirs Gonca, Dr. sc. ing., Professor, Institute of Mechanics, Riga Technical University.

Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 67089317;

Fax: +371 67089748;

E-mail: Vladimirs.gonca@rtu.lv

Yuriy Shvab, doctoral student, Institute of Mechanics, Riga Technical University.

Address: 6 Ezermalas iela, Riga, LV-1006, Latvia. Phone: +371 67089473;

Fax: +371 67089748;

E-mail: Juris.shvabs@rtu.lv

Vladimirs Gonca, Yuriy Shvab. Estimation of the accuracy of the Ritz method for the calculation of rubber technical products

Rubber shock absorbers have been widely used in various branches of engineering. To use and design rubber technical products, analytical formulas are necessary for calculating such products, particularly when designing new products. Unfortunately, there are no exact analytical solutions for rubber parts. All analytical solutions are approximate; in order to use them, it is very important to know how far the result is from the real and accurate one. This paper presents a method for estimating the accuracy of the most common approximate solution of the Ritz method. Two approximate solutions were obtained for the same problem: first solution was obtained by employing the Ritz method, the second solution was obtained by using the method of functional assessment method proposed by M. G. Slobodyanskij for a particular case of a quadratic functional. The exact solution is found between these two solutions. The above decision confirms the ability to use two-way functional assessment to evaluate the accuracy of approximate solutions. The charts for the form factor solutions with excess and deficiency are obtained. By means of these charts it is easy to obtain the dependence “force-sediment” for the rubber products of various geometric shapes. Only small deformations (10–15 %) are considered in the experiments. All results are displayed graphically, and all calculations and plotting are done in the program Mathcad.