

„Spēks-nosēde” veida tuvinātu risinājumu kļūdas noteikšana gumijas tehniskajiem izstrādājumiem

Vladimirs Gonca¹, Jurijs Švabs²

^{1,2}Rīgas Tehniskā universitāte

Kopsavilkums. Visas analītiski iegūtās sakarības gumijas tehniskajiem izstrādājumiem ir tuvinātas, jo tiem neeksistē precīzi analītiski risinājumi. Tāpēc ir ļoti svarīgi zināt, ar kādu kļūdu iegūts risinājums, vai precīzs risinājums ir lielāks vai mazāks par iegūto. Darbā tiek aplūkota „spēks-nosēde” atkarību iegūšanas metodika elastomēra izstrādājumiem ar pilnas potenciālās enerģijas minimuma principu un ar papildenerģijas minimuma principu, lai varētu novērtēt iegūto risinājumu precizitāti. Tas savukārt ļauj precīzāk analizēt gumijas izstrādājumu darbību aksiālās spiedes apstākļos. Risinot uzdevumu sakarības „spēks-nosēde” atrašanai ar pilnas enerģijas minimuma principu, iegūtais risinājums vienmēr būs ar nosēdes iztrūkumu; risinot šo uzdevumu ar papildenerģijas minimuma principu, iegūtais risinājums vienmēr būs ar nosēdes pārpalikumu, bet precīzs risinājums vienmēr būs starp šiem diviem risinājumiem. Risinājumi tiek iegūti gan gumijas slāņa nesaspiežamības gadījumā, gan gumijas slāņa vājas saspiežamības gadījumā, lai optimāli veiktu elastomēra izstrādājuma projektēšanu vai arī lai noskaidrotu maksimālo pieļaujamo slodzi esošam izstrādājumam, ja tas darbojas mazu deformāciju (līdz 10–15 %) apgabalā. Visi iegūtie rezultāti attēloti ar grafiku palīdzību.

Atslēgas vārdi: amortizators, elastomērs, spēks-nosēde, spiede, stingums.

I. IEVADS

Pēdējā laikā elastomēra izstrādājumu izmantošana dažādās rūpniecības nozarēs, galvenokārt mašīnbūvē, palielinās, pateicoties fizikālajām un mehāniskajām gumijas īpašībām (labas amortizācijas spējas, augsta pretestība pret ķīmiskiem un fizikāliem faktoriem spēja strādāt lielu apgriežamo deformāciju gadījumos maza pretestība nobīdēm, augsta stingrība un nestspēja pamatslogojuma virzienā). Galvenā gumijas īpašība ir tās lielālastība. Jo sarežģītāka un modernāka tehniskā ierīce, jo vairāk elastomēra izstrādājumu izmantots šajā ierīcē. Piemēram, automobiļi tiek pielietoti vairāk nekā tūkstošus elastomēra izstrādājumu, mūsdienīgā lidmašīnā – 10–12 tūkstoši, kuģī – 30 tūkstoši, AES – vairāk nekā 50 tūkstoši.

Darbā izstrādāta metodika, kas ļauj elastomēra amortizatoriem iegūt atkarību „spēks-nosēde” pēc pilnas potenciālās enerģijas minimuma principa un pēc papildenerģijas minimuma principa. Iegūta analītiskā atkarība „spēks-nosēde” pilniem c taisnstūriem amortizatoriem, analizēta vājas saspiežamības ietekme (Puasona koeficients μ tuvu 0,5), lai pareizi projektētu elastomēra amortizatorus un novērstu rezultāta kļūdu. Veikta tuvināto risinājumu vērtēšana pēc divām metodēm un noteikta darba pielietojamība konkrētiem amortizatoriem.

II. PILNAS POTENCIĀLĀS ENERĢIJAS MINIMUMA PRINCIPS.

RITCA METODE

Pilnas potenciālās enerģijas Π minimuma princips: konstrukcija atrodas stabilā līdzsvara stāvoklī, kad tās pilnā potenciālā enerģija ieņem minimālu vērtību [1]–[5].

Pilnā sistēmas potenciālā enerģija Π :

$$\Pi = U - A, \quad (1)$$

kur U – enerģija, ko konstrukcija ieguvusi deformācijas ceļā;

$$U = G \int_V [\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{3\mu}{1+\mu} s \varepsilon_{ij} - \frac{9}{4} \frac{(1-2\mu)}{(1+\mu)^2} s^2] dV, \quad (2)$$

kur s – hidrostatiska spiediena funkcija;

G – bīdes modulis;

μ – Puasona koeficients;

ε_{ij} – deformācijas;

V – ķermeņa tilpums,

A – ārējās slodzes veiktais darbs;

$$A = \int_{\Omega} P_i u_i d\Omega,$$

kur P_i – ārējie spēki;

u_i – pārvietojumu funkcija;

Ω – ķermeņa virsma.

Tā kā pārvietojumu un hidrostatiskā spiediena variācijas ir savstarpēji neatkarīgi lielumi, tad pie pārvietojumu funkcijas atrašanas, izmantojot potenciālās enerģijas minimuma principu, pietiek izpildīt tikai ģeometriskos robežnosacījumus.

III. PAPILDENERĢIJAS MINIMUMA PRINCIPS

Papildenerģijas minimuma princips: īsts sprieguma stāvoklis, kas apmierina līdzsvara nosacījumus, salīdzinot ar atšķirīgām sprieguma sistēmām, atšķiras ar to, ka papildenerģija $\bar{\Pi}$ [2] un [3]:

$$\bar{\Pi} = \bar{U} - \int_{\Omega} P_i u_i d\Omega, \quad (3)$$

kur

$$\bar{U} = \frac{1}{4G} \int_V (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii}^2) dV, \quad (4)$$

kur σ_{ij} – spriegumi.

Izmantojot papildu enerģijas minimuma principu pie sprieguma funkcijas σ_{ij} izvēles, obligāti jāizpilda līdzsvara vienādojumi ķermeņa tilpumā un uz ķermeņa virsmas ar uzdotajiem ārējiem slodzes spēkiem.

Ja tiek atrasta atkarība „spēks-nosēde” $\Delta(P)$, izmantojot minimuma principu pilnai (2) un papildu (3) potenciālai enerģijai, tad kā relatīvi precīzs risinājums tiek saņemta „dakša” [2]:

$$\bar{\Delta}(P) < \Delta_p(P) < \bar{\bar{\Delta}}(P), \quad (5)$$

kur $\bar{\Delta}(P)$ – risinājums, kas bija iegūts ar pilnas potenciālas enerģijas (2) minimuma principu;

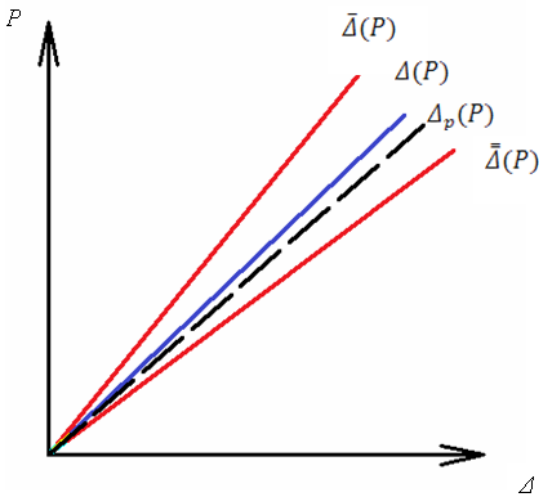
$\bar{\bar{\Delta}}(P)$ – risinājums, kas bija iegūts ar papildenerģijas (3) minimuma principu;

$\Delta_p(P)$ – precīza atkarība „spēks-nosēde”.

Laī tuvotos precīzākam risinājumam, var aproksimēt $\bar{\Delta}(P)$ un $\bar{\bar{\Delta}}(P)$:

$$\Delta(P) = \frac{\bar{\Delta}(P) + \bar{\bar{\Delta}}(P)}{2}. \quad (6)$$

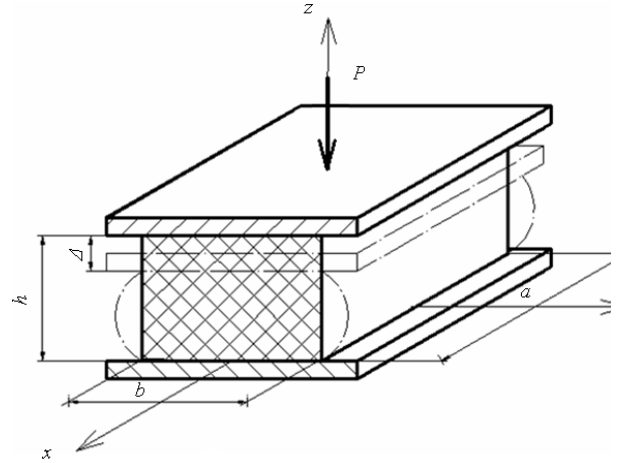
Grafiski tas parādīts 1. attēlā.



1. att. Sakarība „spēks-nosēde”.

Metodika tiek apskatīta ar reāla piemēra palīdzību: taisnstūra prizmatiska gumijas izstrādājuma aplēses shēma, slogojot vertikālā virzienā (2. att.).

No sākuma sakarība „spēks-nosēde” tiek aprēķināta ar pilnas potenciālās enerģijas minimuma principu, pēc tam – ar papildenerģijas minimuma principu.



2. att. Taisnstūra amortizatora aplēses shēma.

IV. POTENCIĀLĀS ENERĢIJAS MINIMUMA PRINCIPS

Tā kā amortizators ir taisnstūra veidā, matemātiskais modelis tiek sastādīts Dekarta koordināšu sistēmā. Tiek pierakstītas pārvietojuma funkcijas:

$$w = \frac{\bar{\Delta}}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) - 1 \right],$$

$$u = xB \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right), \quad (7)$$

$$v = yC \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right),$$

kur $\bar{\Delta}$, B , C – konstantes.

Pēc tam tiek pierakstīti robežnosacījumi:

$$\begin{aligned} u(x, y, z)|_{z=0} = 0; \quad v(x, y, z)|_{z=0} = 0; \\ w(x, y, z)|_{z=0} = 0; \quad u(x, y, z)|_{z=h} = 0; \\ v(x, y, z)|_{z=h} = 0; \quad w(x, y, z)|_{z=h} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

kur u – pārvietojums pa x asi;

w – pārvietojums pa z asi;

v – pārvietojums pa y asi.

Ģeometriskās sakarības:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = 0. \quad (9)$$

Pie pārvietojumu funkcijām tiek pievienota hidrostatiskā spiediena funkcija:

$$s = D \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right). \quad (10)$$

Tad pilnas potenciālas enerģijas funkcionāli pieraksta veidā:

$$\bar{\Pi} = G \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_0^h \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{yz} + \gamma_{zx})^2 + \frac{3\mu}{1+\mu} s(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{4(1-2\mu)}{9(1+\mu)^2} \mu s^2 \right] dx dy dz \quad (11)$$

Pēc potenciālās enerģijas minimuma principa:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial B, C, D, \Delta} = 0. \quad (12)$$

Tiek saņemta atkarība $\bar{\Delta}(P)$, paaugstinātu pēc spēka attiecīgi precīza risinājuma:

$$\bar{P} = Gab \frac{\pi^2 \bar{\Delta}}{4h} \left(1 + \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2 + \frac{1-2\mu}{\mu} A_1 A_2} \right), \quad (13)$$

kur

$$A_1 = 1 + \frac{\pi^2 \beta^2}{24}; \quad A_2 = 1 + \frac{\pi^2 \alpha^2}{24};$$

$$\alpha = \frac{a}{h}; \quad \beta = \frac{b}{h}.$$

Ja amortizatora ģeometriskie izmēri ļauj neņemt vērā vāju gumijas saspiežamību ($\mu = 0,5$), tad no (13) seko atkarība „spēks-nosēde”, kas sakrīt ar [1]:

$$\bar{P}^* = Gab \frac{\pi^2 \bar{\Delta}^*}{4h} \left(1 + \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \right). \quad (14)$$

Izmantojot hipotēzes [6], var uzskatīt, ka gumijas slāņa spriegots stāvoklis ir noteikts ar bīdes deformācijām σ_{xz} un σ_{yz} pie σ_{xy} un hidrostatiska spiediena $s = s(x, y)$ ieviešanu kuru noteica normālspriegumi σ_{xx} , σ_{yy} un σ_{zz} gumijas slāņa biežumā. Ja pieņem šīs hipotēzes, tad var pieņemt:

$$\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx \sigma_{zz} = s(x, y), \quad (15)$$

$$\sigma_{xz} = -z \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = -z \frac{\partial s}{\partial y}.$$

Sakarības (15) apmierina līdzsvara vienādojumi:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = x, y, z. \quad (16)$$

Spēka robežnosacījumus uz gumijas slāņa brīvām virsmām var pierakstīt ar vienādojumiem:

$$s(\pm 0,5a; y) = 0, \quad (17)$$

$$s(x \pm 0,5b). \quad (17)$$

Papildenerģiju (3) un (4), ievērojot (18) pēc integrēšanas pa z , var pierakstīt šādi:

$$\bar{\Pi} = \iint_F \left\{ \frac{h^3}{24G} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 \right] + s\Delta \right\} dx dy. \quad (18)$$

No (17) minimuma nosacījuma tiek iegūts Eilera vienādojums funkcijas $s(x, y)$ atrašanai:

$$\frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial y^2} = \frac{12G\Delta}{h^3} \quad (19)$$

pie robežnosacījumiem (20). Meklējamo sakarību „spēks-nosēde” var atrast no līdzsvara nosacījuma:

$$P = - \int_{-0,5a}^{0,5a} \int_{-0,5b}^{0,5b} \left[s(x, y) - 3G \frac{\Delta}{h} \right] dx dy. \quad (20)$$

Vienādojuma (22) atrisinājumu ar robežnosacījumiem (20) meklē ar Furjē metodes palīdzību [7], izmantojot trigonometriskās rindas:

$$s(x, y) = \sum_{1,3,5}^n f_n(y) \cos \frac{\pi n x}{a} \quad (21)$$

pie robežnosacījumiem:

$$f_n(\pm 0,5b) = 0. \quad (22)$$

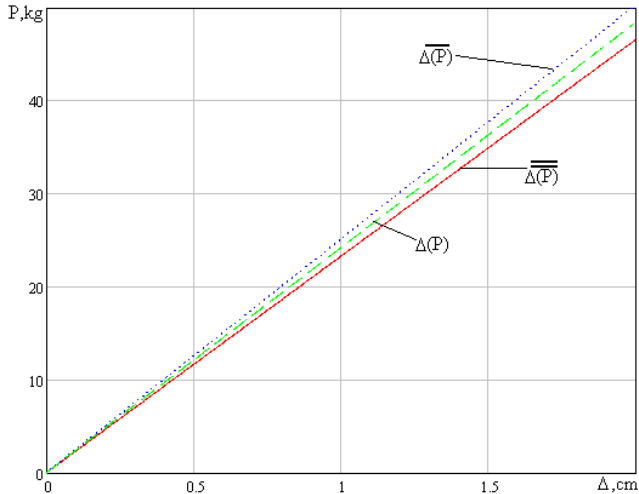
Rindas (19) ātri konverģē. Tad, ierobežojoties ar vienu locekli no rindas (19), tiek iegūta sakarība „spēks-nosēde” no (20) līdz (22):

$$\bar{P} = 3abG \frac{\Delta}{h} \left[1 + \frac{128}{\pi^4} \cdot \frac{a^2}{h^2} \left(1 - \frac{th\left(\frac{\pi \cdot b}{2 \cdot a}\right)}{\frac{\pi \cdot b}{2 \cdot a}} \right) \right]. \quad (23)$$

Kā piemērs tiek aplūkots amortizators (skat. 2. att.) ar izmēriem:

$a = 2$ cm; $b = 2$ cm; $h = 3$ cm; gumija 8240; $G = 4,8$ kG/cm²; $\mu = 0,4934$.

No (16) un (17) pie izvēlētās amortizatora ģeometrijas izriet, ka gumijas vājo saspiežamības ietekmi var neņemt vērā un atkarību „spēks-nosēde” $\Delta(P)$ var aprēķināt pēc formulās (17) pēc pilnas potenciālas enerģijas minimuma principa, pēc formulas (23) – pēc papildenerģijas minimuma principa. Rezultāts attēlots grafiski 3. attēlā.



3. att. Atkarība „spēks-nosēde”, ja $\mu = 0,5$.

V. SECINĀJUMI

Ir iegūta metodika, kas ļauj novērtēt iegūtos risinājumus pēc divām metodēm un salīdzināt tos. Iegūtie risinājumi ir tuvināti, tāpēc nepieciešams novērtēt risinājuma precizitāti, kas ir būtiski analizējot elastomēra amortizatora darbību pie dažādiem sloģojuma veidiem. Tas ļauj iegūt risinājumu ar pieļaujamo precizitāti, kā arī ļoti precīzi aprakstīt amortizatora uzvedību.

Vladimirs Gonca, Yuriy Shvab. Assessment of the accuracy of approximate solutions of the type of force-sediment for rubber products in compression

For an efficient utilization of elastomeric elements in modern mechanical engineering, including vibration insulation, it is necessary to be able to calculate the characteristics of compressive stiffness of elastomeric elements. All analytical solutions for rubber products are approximate. There are no exact solutions for rubber products. It is therefore very important to be able to evaluate the accuracy of the solutions. The paper considers a technique to obtain accurate estimates for the dependence of the force-sediment t precipitate. The essence of the method boils down to that one and the same problem is solved, first using the principle of minimum total potential energy, and then using the principle of minimum additional energy (principle of virtual work). The solution obtained using the principle of minimum potential energy is overestimated in strength, that is real deposit will always be more derived. In its turn, the solution obtained using the principle of minimum additional energy is too low in strength, that is real deposit will always be less than received. As a result, we obtain the boundary, which is the real solution. The technique is considered in an example of compression of rectangular rubber products. Solutions are obtained at weak compressibility of rubber. Also, a special case not considering the weak compressibility of rubber is analyzed. Only small deformations (10–15 %) are considered. All results are displayed graphically, and all calculations and plotting are done in the program Mathcad.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Лавендел, Э. Э. *Расчеты резинотехнических изделий*. М., 1976. 130 с.
2. Дымников, С. И. *Расчет резиновых элементов конструкций*. Рига: Зинатне, 1991. 277 с.
3. Дымников, С. И., Лавендел, Э. Э., Павловскис, А.-М., Сниегс, М. И. *Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов*. Рига: Зинатне, 1980.
4. Григорьев, Е. Т. *Расчет и конструирование резиновых амортизаторов*. Москва: 1990.
5. Гонца, В. Ф. Влияние слабой сжимаемости на решение задач теории упругости для несжимаемого материала. *Вопросы динамики и прочности*. Рига, 1970, вып. 20, с. 185–189.
6. Бидерман, В. Л., Мартянов, Г. В. Сжатие и изгиб тонкослойных резино-металлических упругих элементов. *Изв. АН СССР, Механика и машиностроение Москва*, 1983, вып. 23.
7. Смирнов, В. И. *Курс высшей математики*. Москва, 1957, т. 4.

Vladimirs Gonca, Dr. sc. ing., Professor,
Institute of Mechanics, Riga Technical University.
Address: 6 Ezermalas iela, Riga LV-1006, Latvia.
Phone: +371 67089317; Fax: +371 67089748;
E-mail: Vladimirs.gonca@rtu.lv

Yuriy Shvab, doctoral student, Institute of Mechanics,
Riga Technical University.
Address: 6 Ezermalas iela, Riga LV-1006, Latvia.
Phone: +371 67089473 ; Fax: +371 67089748 ;
E-mail: Jurijs.svabs@rtu.lv