

APPROXIMATION OF FLOW MEASUREMENTS IN DYNAMO EXPERIMENT  
WATER MODELDINAMO EKSPERIMENTA ŪDENS MODEĻA PLŪSMAS MĒRĪJUMU  
APROKSIMĀCIJA

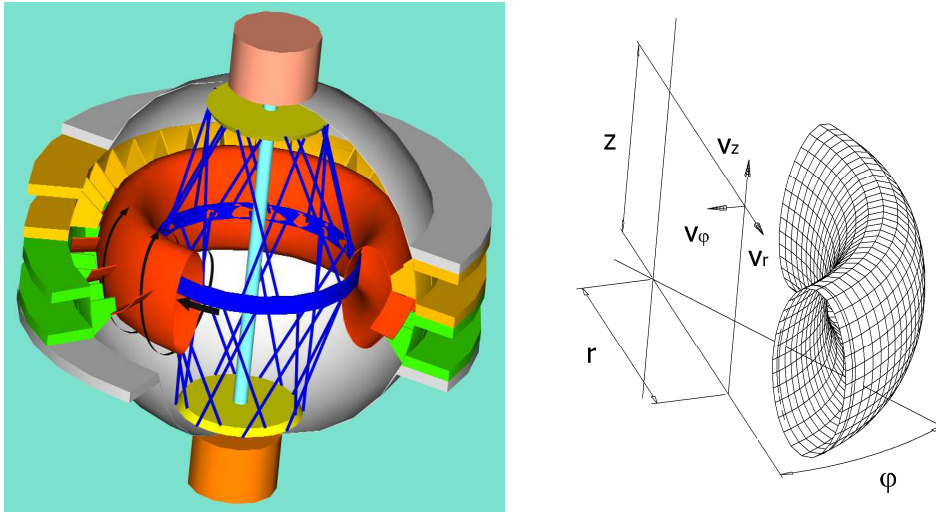
**Guntis Lipsbergs**, Mg.sc. ing., Postgraduate Student  
Riga Technical University, Institute of Mechanics  
Address: 6 Ezermalas Street, Riga, LV-1006, Latvia  
Phone: +371 67089473  
E - mail: guntis\_l@sal.lv

*Atslēgas vārdi: plūsmas mērījumi, aproksimācija, skaitliskās metodes*

## 1. Ievads

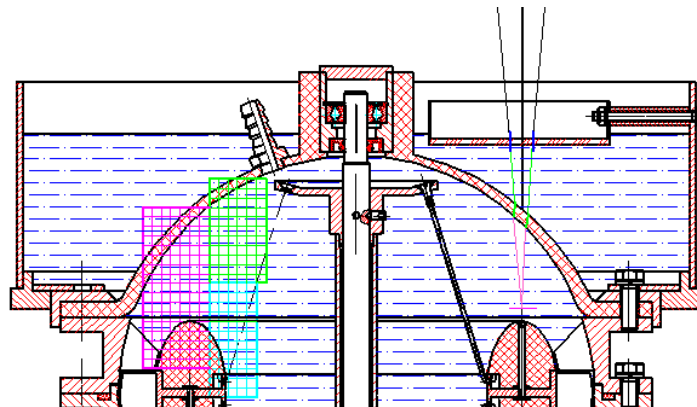
Magnetohidrodinamiskā dinamo eksperimenta mērķis – mehāniski maisot elektriski vadošu šķidrumu, sasniegt magnētiskā lauka pašierosmi laboratorijā, tādā veidā atdarinot zemes un citu kosmisko ķermeņu magnētiskā lauka rašanos. Izvēloties eksperimenta shēmu, jāatrod kompromiss starp teorētiski cerīgām un praktiski īstenojamām plūsmas formām. Zinot izvēlētajā plūsmas ātrumu sadalījumu, iespējams veikt kinemātiskā dinamo simulāciju un prognozēt vajadzīgos parametrus (plūsmas ātrumu, iekārtas izmērus, jaudu).

Piedāvātās sfēriskās ģeometrijas shēmas hidrodinamikas pārbaudei ir izgatavots neliels (sfēras diametrs 250 mm) iekārtas modelis. Kā šķidrums tajā tiek izmantots ūdens, kas pēc dinamiskajām īpašībām (kinemātiskās viskozitātes) tuvs šķidram nātrijam, ko plānots izmantot īstajā dinamo eksperimentā. Iekārta sastāv no dobas, caurspīdīgas, ar ūdeni pildītas sfēras, kuras iekšpusē ievietots rotējošs tors ar tam piestiprinātu propelleru (1. attēlā). Tors ir piestiprināts ar spieķiem pie vārpstas, tādējādi plūsma noslēdzas caur tiem. Reālajā dinamo arī tors būs pildīts ar šķidrumu, modelī tas nav vajadzīgs, jo tā rotācijas ātrumu var uzskatīt vienādu ar tora ātrumu. Mērāmo plūsmu rada propellera veida sūkņa rats, kura kustīgās lāpstiņas piestiprinātas pie tora, bet divas rindas nekustīgo lāpstiņu – pie sfēras, zem un virs kustīgajām. Cilindriskajās koordinātēs tai būs divas komponentes -  $v_r$  un  $v_z$  meridionālā plaknē un mazāka azimutālā  $v_\varphi$ . Ūdens tiek sūknēts uz augšu.

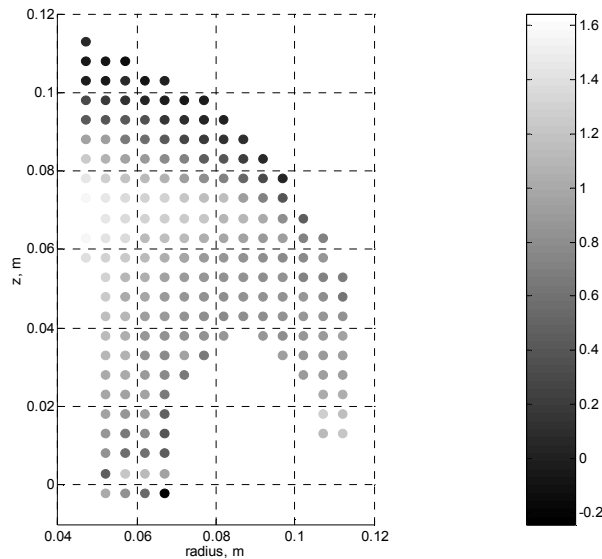


1. attēls. Sfēriskā dinamo shēma

Plūsmas mērījumi veikti ar vienkompentes lāzera Doplera anemometru (LDA), izmērs starp meridionālā plaknē esoša mērīšanas režģa punktiem 5 mm. Anemometrijas īstenošanai nepieciešama plūsmā sekojošu daļiņu esamība mērītajā vidē, šajā gadījumā izmantots poliamīda pulveris. Tā kā plūsma ir izteikti turbulenta, vidējais ātrums punktā tiek noteikts, balstoties uz 100...500 signāliem, mērīšanas laiks ne vairāk par 30 s. Sfēras augšējā daļā izmērītas ātruma  $v_r$  un  $v_\phi$  komponentes. Vertikālo komponenti izmērīt ir apgrūtināts, jo modelī nav iespējams ievadīt lāzera staru no sāniem (2. attēls). Mērījumi ir veikti pie 235 un lineāri ekstrapolēti uz 300 apgr./min, pie kuriem ir doti iepriekš izdarīta aprēķina dati [1]. Salīdzināšana rāda, ka meridionālās plūsmas izmērītais vidējais ātrums ir 78% no aprēķinātā. Salīdzinot  $v_r$  komponenti, redzams, ka plūsmas struktūra pamatā atbilst rēķinātajai, izņemot apgabalu pie sienas sfēras augšpusē (3. attēls). Tur plūsma uzskatāmi bremsējas, kamēr nedaudz zemāk tā ievērojami (1.3...1.5 reizes) pārsniedz aprēķināto. Tas varētu būt izskaidrojams ar rotējošā spieķu stiprinājuma atloka ietekmi.



2. attēls. Mērīšanas shēma. Pa kreisi mērīšanas režģis, pa labi lāzera staru krustpunkts un mērīšanas virziens (perpendikulāri leņķa bisektrisei)



3. attēls. Mērījumu attiecība pret aprēķinu, komponente  $v_r$ , m/s

## 2. Vertikālās komponentes aprēķināšana

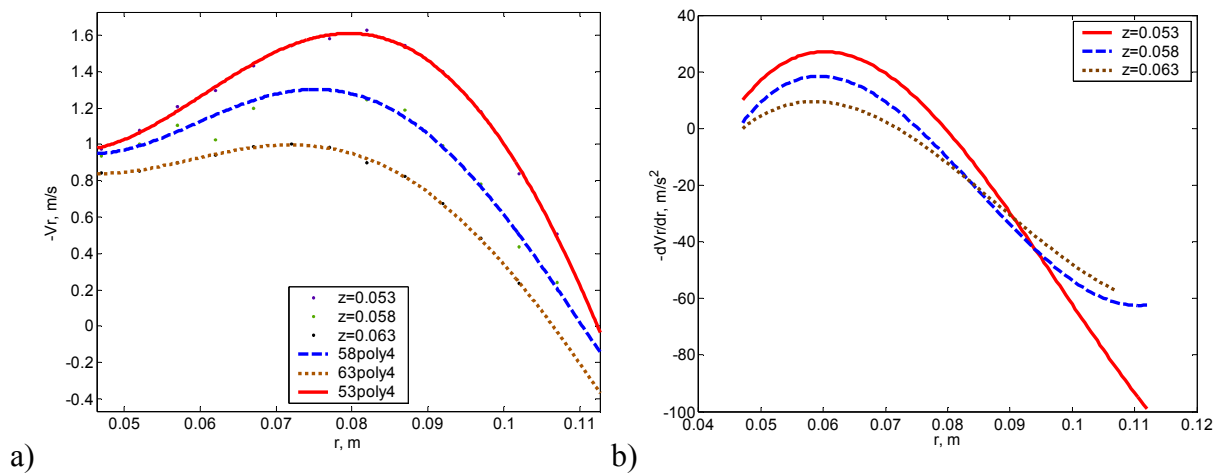
Tā kā plūsma ir noslēgta, zināmas abas robežvirsmas – tors un sfēriskā virsma, neizmērīto meridoniālo komponenti  $v_z$  principā ir iespējams aprēķināt skaitliski no  $v_r$ , izmantojot šķidruma nesaspiežamību  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

Ja pieņem, ka azimutālā komponente  $v_\varphi$  nemainās pēc  $\varphi$ , tad cilindriskā koordinātu sistēmā

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1)$$

Tātad, lai aprēķinātu  $v_z$ , vispirms jāatrod  $\frac{\partial v_r}{\partial r}$ . To atrod, atvasinot skaitliski iegūto  $v_r$  atkarību no rādiusa, katrai  $z$  koordinātei atsevišķi (4. attēls). Tā kā plūsma ir turbulenta un mērījumu rezultāti satur kļūdu, nepieciešama aproksimācija. Bet tas dod apmierinošus rezultātus tikai pie punktu skaita, kas ir daudz lielāks par polinoma kārtu. Tāpēc nevar gaidīt lielu šāda aprēķina precizitāti pie dotā mērījumu soļa (5 mm).

Aproksimācijai lietots pamatā ceturtais pakāpes polinoms, vietās, kur ir ne vairāk par četriem punktiem – otrās pakāpes polinoms. Atvasinot iegūst gludu funkciju.

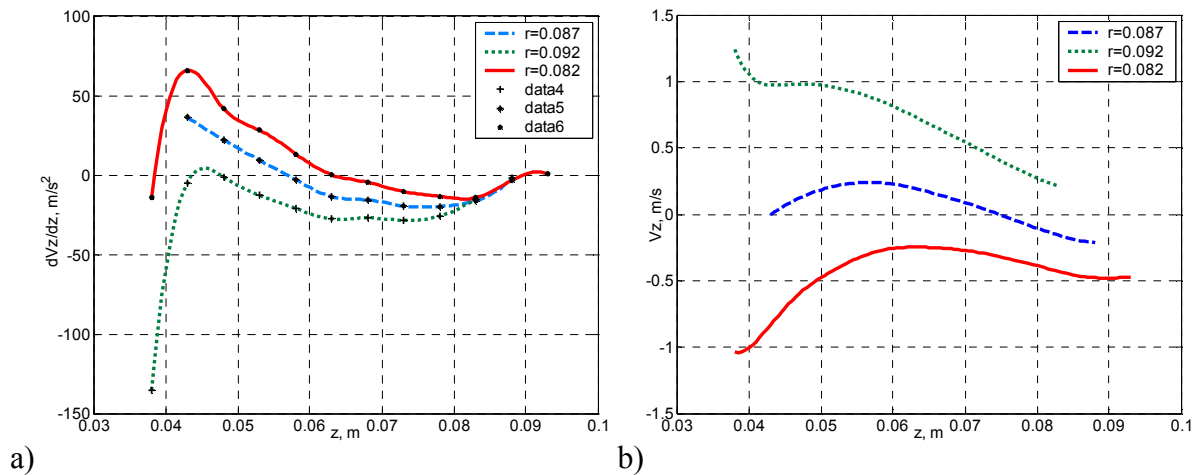


4. attēls. a)  $v_r$  komponentes aproksimācija b)  $v_r$  atvasinājums

Ātruma komponenti  $v_z$  aprēķina, integrējot pie noteikta  $r$

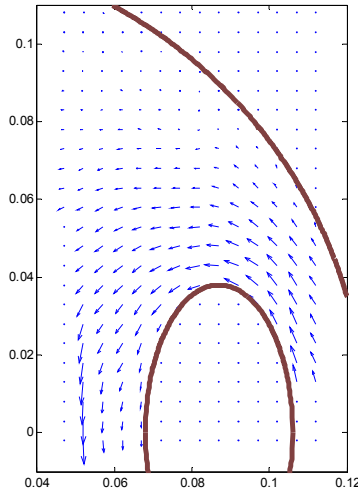
$$v_z = v_{z1} + \int_{z1}^z \left( -\frac{v_{rz}}{r} - \frac{\partial v_{rz}}{\partial r} \right) dz, \quad (2)$$

kur iekavās esošo lielumu iegūst, interpolējot pēc  $z$  kā kubisko splainu pa zināmajiem punktiem (5.a attēls).  $v_{z1}$  ir robežnosacījums, ko atrod kā  $v_{r1} \cdot \tan(\alpha)$ , kur  $v_{r1}$  ir virsmai tuvākais mērījums,  $\alpha$  - robežvirsmas normāles leņķis pret vertikāli. Pie vidējiem  $r$ , kur ir divas robežvirsmas, izrēķināta vidējā  $v_z$  vērtība no abiem variantiem.



5. attēls. a) interpolētā  $dv_z/dz$  līkne, b) aprēķinātā komponente  $v_z$ , ievērojot robežnosacījumu pie elipses

Uzzīmējot vektoru lauka attēlu mērījumu punktos, redzams, ka lielākā plūsma ir tora tuvumā, bet tuvāk augšpusei, polam, ātrumi ir mazi un plūsma veido virpuļus (6. attēls).



6. attēls. Ātruma vektoru lauks mērījumu punktos

### 3. Plūsmas funkcijas aproksimācija

Tālākajiem magnētiskās hidrodinamikas aprēķiniem plūsmas ātrumu sadalījumu (meridionālā plaknē) nepieciešams aprakstīt funkcijas veidā. Viens veids, kā to izdarīt – aproksimēt plūsmas funkciju  $\Psi$  kā divu argumentu  $N$  pakāpes polinomu no  $r$  un  $z$ , un pēc mazāko kvadrātu metodes abām ātruma komponentēm aprēķināt koeficientus. Cilindriskā koordinātu sistēmā

$$\psi_{\varphi} = \sum_0^{i+j=N} a_{ij} \cdot r^i \cdot z^j \cdot (R^2 - r^2 - z^2), \quad (3)$$

$$v_r = -\frac{\partial \psi_{\varphi}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$v_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\psi_{\varphi} \cdot r)}{\partial r}. \quad (5)$$

Reizinātājs  $(R^2 - r^2 - z^2)$  formulā (3) vajadzīgs, lai ievērotu sfēriskās virsmas (rādiuss  $R$ ) robežnoteikumu. Cilindriskajās koordinātēs līnijai, kurai plūsmas funkcijas vērtība ir 0, nav ātruma komponentes normāles virzienā. Rezultātā iegūst  $v_r$  un  $v_z$  kā polinomus no  $r$  un  $z$ . Minimējot kopējo starpību kvadrātu summu no abām funkcijām, aprēķina koeficientus  $a_{ij}$ . Šādi aproksimējot, plūsmas nepārtrauktība tiek ievērota automātiski.

Taču divdimensionāla aproksimācija prasa lielu bāzes funkciju skaitu, kas rada slikti nosacītu vienādojumu koeficientu matricu [2]. Nosacītības skaitli (condition number)  $k$  oriģinālajai matricai  $G$  (design matrix) iegūst kā  $\sigma_1/\sigma_n$ , kur  $\sigma_1$  un  $\sigma_n$  ir lielākā un mazākā singulārvērtība. Ņemot piektās pakāpes polinomu,  $k(G)$  ir  $\approx 2.05 \cdot 10^7$ , bet, lietojot 52 bitu aritmētiku (double precision), tas vēl neizraisa būtiskas noapaļošanas kļūdas. Relatīvā mašīnkļūda (machine epsilon)  $\hbar = 2^{-52}$  un  $\hbar \cdot k(G) = 4.55 \cdot 10^{-9} \leq 1$ .

Tomēr pati aproksimācija nedod pārāk labus rezultātus. Ņemot par pamatu aprēķina datus (1615 punkti), vidējais atlikuma kvadrāts pie piektās pakāpes sanāk ap  $0.1 \text{ (m/s)}^2$ , kas nav pārāk labs rādītājs. Redzams arī, ka lietojot augstāku pakāpi nav jēgas, jo kvadrātu summa  $\chi^2$  ar to būtiski nemazinās.

1. tabula. Atlikumu kvadrātu summa atkarībā no polinoma pakāpes m

m	$\chi_{vr}^2, (m/s)^2$	$\chi_{vz}^2, (m/s)^2$	$\chi^2, (m/s)^2$
2	775.1	1095.4	1870.5
3	306.15	392.75	698.9
4	194.4	153.87	348.27
5	162	146.84	308.84
6	149.9	138.69	288.59
7	139.1	132.32	271.42

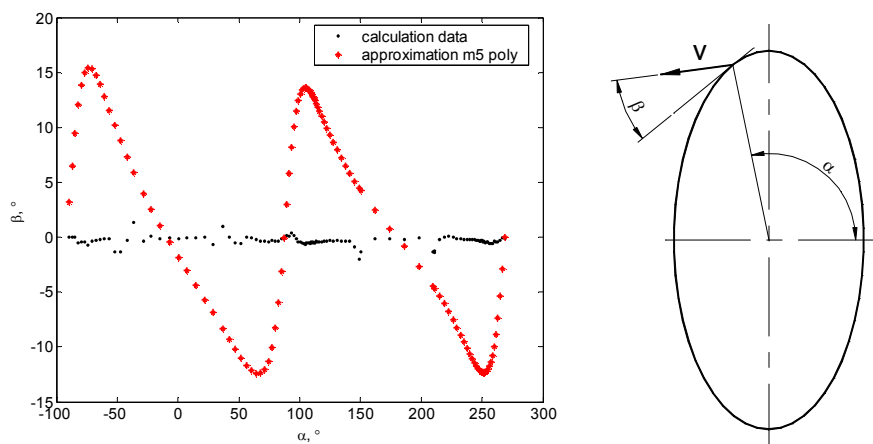
2. tabula. Aprēķinātie piektās pakāpes polinoma koeficienti

a00	a01	a02	a03	a04	a05	a10	a11	a12
3.2624	7.0765	13.4704	2054.61	15199.81	111921.4	-307.163	-1611.26	8116.843

a13	a14	a20	a21	a22	a23	a30	a31
-120825	-1853534	7630.77	46286.98	409249.4	457431	-131455	-489935

a32	a40	a41	a50
-1034518	624047.2	1973673	308110.4

Bez tam nav iespējams stingri ievērot robežnoteikumu uz tora virsmas, aproksimācija slikti apraksta plūsmu apkārt elipsei. Leņķis  $\beta$  starp elipses pieskari un ātruma virzienu uz robežvirsmas (pozitīvs prom no elipses, negatīvs elipses virzienā) sasniedz  $15^\circ$  (7. attēls).



7. attēls. Leņķa  $\beta$  atkarība no polārā leņķa  $\alpha$  uz elipses robežvirsmas ( $\alpha = 0^\circ$  pie lāpstiņām,  $90^\circ$  tora augšējā punktā)

#### 4. Aproksimācija sfēriskajās koordinātēs

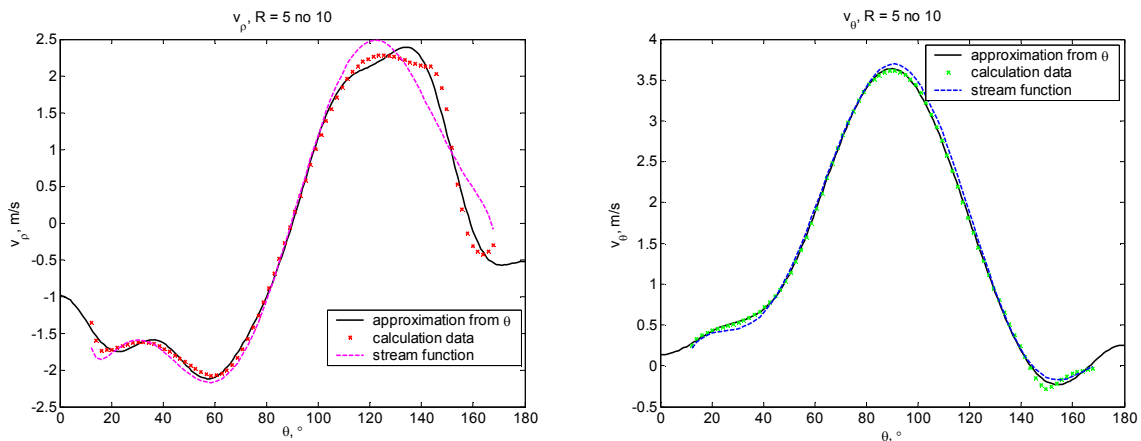
Otrs veids ir aproksimēt mērījumu rezultātus ar noteiktu soli pa rādiusu  $\rho$  tikai pēc polārā leņķa  $\theta$  kosinusa sfēriskajās koordinātēs. Tālākiem aprēķiniem funkcija no rādiusa nav tik būtiska. Tā kā  $\theta$  (mērot no augšējā pola) mainās intervālā  $(0, \pi)$ , var lietot Ležandra ortogonālos polinomus  $\chi_j$ , kas dod stabilus risinājumus [3].

$$v_{\rho, \theta} = \sum_{j=0}^m a_j^{(m)} \chi_j(\cos(\theta)), \quad (6)$$

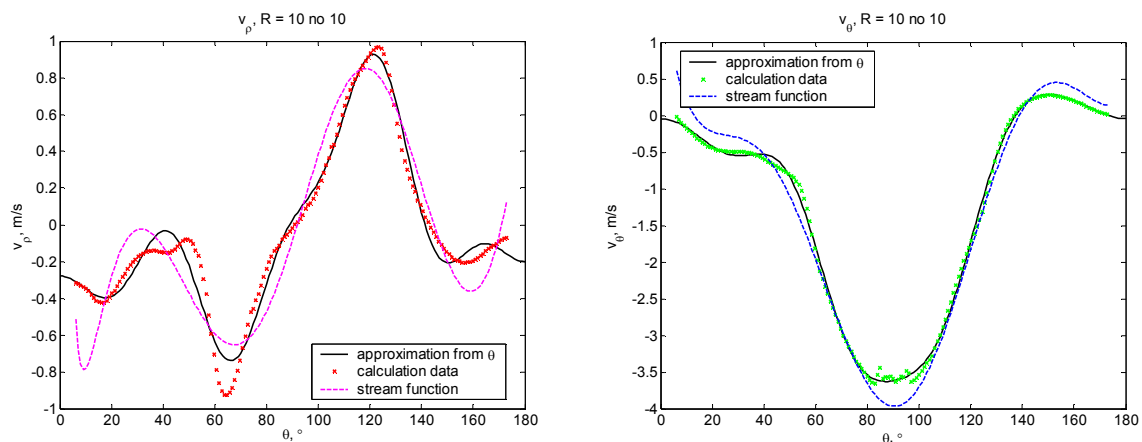
kur  $\chi_0(\cos(\theta)) = 1$ ;  $\chi_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ ;  $\chi_3(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}(3\cos^2(\theta) - 1)$ ; ...

Lai dabūtu punktus uz aploces, datus iepriekš nepieciešams interpolēt. Aprēķina dati ir doti neregulāra režģa punktos, tāpēc jālieto interpolācija pa trīsstūriem. Tos var iegūt, piemēram, ar Delonē triangulāciju, kā MATLAB funkcijā griddata.

Punkti uz aploces ņemti ar konstantu soli 2 mm. Lai varētu viennozīmīgi noteikt koeficientus, punktu skaitam jābūt ne mazākam kā  $m+1$ , kas neīstenojas tuvu centram. Tāpēc tur jāpaņem papildus punkti. Elipses iekšpusē arī jābūt punktiem, tajos ātrums ir nulle.



8. attēls.  $v_\rho$  un  $v_\theta$  aproksimācija pēc  $\theta$  pie rādiusa soļa 5 no 10. Salīdzināšanai parādīta arī aproksimācija pēc plūsmas funkcijas (piektās pakāpes polinoms)



9. attēls.  $v_\rho$  un  $v_\theta$  aproksimācija pēc  $\theta$  pie rādiusa soļa 10 no 10

Ņemot desmitās pakāpes polinomu un desmit soļus pa rādiusu, iegūst samērā labu aproksimāciju, vidējais atlikuma kvadrāts (visiem punktiem) radiālajai komponentei sanāk 0.015, leņķiskajai komponentei – 0.006 (m/s)<sup>2</sup>. Koeficientu atšķirība nav lielāka par divām kārtām. Kā redzams 8. un 9. attēlā, šādā veidā iegūst ievērojami labāku atbilstību datiem nekā ar plūsmas funkcijas aproksimāciju. Šajā gadījumā plūsmas nepārtrauktība netiek tieši ievērota, tiek pieņemts, ka to nodrošina aprēķina dati.

3. tabula. Desmitās pakāpes Ležandra polinoma koeficienti

koef.	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
$v_\rho$	-0.0017	-0.4716	-0.1253	0.8164	-0.3195	-0.5050	0.0889	-0.2190	0.2710	0.3399	-0.1529
$v_\theta$	-1.7924	-0.2931	2.9200	-0.0987	-1.4152	0.1772	-0.0324	0.2299	0.4270	-0.0164	-0.1494

## 5. Secinājumi

Apmierinošus rezultātus dod tikai aproksimācija pēc polārā leņķa. Līdzīgi kā dotos aprēķina datus iespējams aproksimēt arī mērījumu rezultātus, tikai jāņem vērā, ka plūsma nav pilnīgi vertikāli simetriska (tas arī redzams pēc 8. un 9. attēla), tāpēc jāveic attiecīga korekcija. Tāpat nepieciešams atrast ātruma vērtības punktus, kur nav mērījumu (apgabalā ap asi un pie lāpstiņām). Pie tam mērījumu rezultātiem jāapmierina plūsmas nepārtrauktības nosacījums. Iespējams, ka jāveic arī papildus mērījumi ar lielāku izšķirtspēju.

Nākošais darba posms ir šāda veida aproksimācijas ieviešana kinemātiskā dinamo aprēķina programmā, lai prognozētu magnētisko Reinoldsa skaitli, pie kura iestāsies magnētiskā lauka pašierosme.

## Literatūra

1. Christen M. Hidrodinamiskā aprēķina rezultāti, npublicēti.
2. Antia H.M. Numerical Methods for Scientists and Engineers – Birkhäuser, 2002.
3. Вержбицкий В. Численные методы – Москва, Высшая Школа, 2001.

### **Lipsbergs G. Dinamo eksperimenta ūdens modeļa plūsmas mērījumu aproksimācija**

*Rakstā īsi apskatīti galvenie plūsmas ātruma mērījumu rezultāti ūdens modelim, kas paredzēts dinamo eksperimenta hidrodinamiskās daļas pārbaudei. Mērījumi ir salīdzināti ar cita autora iepriekš veiktajiem aprēķina rezultātiem. No mērījumiem skaitliski novērtēta meridionālās plūsmas vertikālā komponente, pamatojoties uz plūsmas nepārtrauktības vienādojumu. Magnētiskās hidrodinamikas aprēķina vajadzībām veikta aprēķina datu aproksimācija ar plūsmas funkcijas cilindriskās koordinātēs palīdzību, meklējot to kā divu argumentu  $n$ -tās pakāpes polinomu. Parādīta šādas aproksimācijas nepiemērotība uzdevumam sliktās nosacītības dēļ. Aprēķināti koeficienti piektās pakāpes polinomam, kas šajā gadījumā ir optimālais variants. Kā labāka metode norādīta plūsmas aproksimācija sfēriskās koordinātēs pa polāro leņķi pie konstanta rādiusa. Kā bāzes funkcijas pielietoti ortogonālie Ležandra polinomi. Aprēķināti koeficienti desmitās pakāpes polinomam.*

### **Lipsbergs G. Approximation of flow measurements in dynamo experiment water model**

*This paper briefly describes main results of flow measurements in water model intended for verification of dynamo experiment's hydrodynamic part. Measurements are compared with calculation results done by other author. Using flow continuity equation, unknown vertical component of the meridional flow is numerically estimated from measurement results. For the purpose of further magnetohydrodynamic simulation, approximation of the calculation data is done in the cylindrical coordinates via stream function. This function is assumed to be a  $n$ -degree polynomial of two variables. Inadequacy of this type of approximation due to ill-conditioning is shown. Coefficients of 5th degree (which appears to be an optimal value in this case) polynomial are given. Other method, approximation of velocity components in spherical coordinates from polar angle at given radius is presented to be more reasonable. Orthogonal Legendre polynomials are used and coefficients for 10th degree are calculated.*

### **Липсбергс Г. Аппроксимация результатов измерений скорости на водной модели эксперимента динамо**

*В работе кратко рассмотрены главные результаты измерений скорости, полученные на водной модели для проверки гидродинамической части эксперимента динамо. Дано сравнение с результатами расчета, проведенного другим автором. Пользуясь уравнением непрерывности потока, По данным измерений проведена численная оценка вертикальной составляющей меридиальной скорости. Для расчета магнитной гидродинамики проведена аппроксимация данных расчета с помощью функции тока в цилиндрических координатах. Функция тока ищется в виде полинома двух аргументов  $n$ -той степени. Показана непригодность такой аппроксимации для этого задания ввиду плохой обусловленности. Рассчитаны коэффициенты 5-той степени, оптимальной для этого случая. Как более пригодный способ указана аппроксимация потока в сферических координатах по полярному углу при постоянном радиусе. Как базисная функция применены ортогональные полиномы Лежандра. Рассчитаны коэффициенты для полинома 10-той степени.*