

THE CRITICAL SPEED OF A SHAFT WITH DIFFERENT MOMENTS OF INERTIA IN CUT PLANE

KRITISKIE APGRIEZIENI VĀRPSTAI, KURAS ŠĶĒLUMAM IR DAŽĀDI INERCES MOMENTI

Juris Cimanskis, professor, Dr.habil.sc.ing.
Latvian Maritime Academy
Department of Marine Engineering
Address: 5B Flotes Street, Riga, LV – 1016, Latvia
Phone: +371 67432091
E-mail: juris.cimanskis@latja.lv

Edgars Kovals, Mg.sc., doctoral studies
Riga Technical University, Institute of Mechanics
Address: 6 Ezermalas Street, Riga, LV-1014, Latvia
Phone: +371 28678844
E-mail: edgars.kovals@wihuri.com

Atslēgas vārdi: shaft, critical speed, moment of inertia

1. Ievads

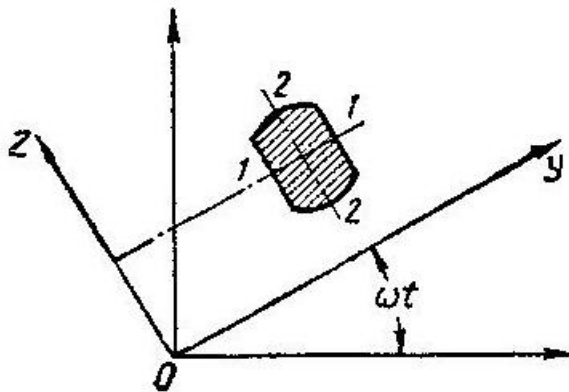
Mehānismos ļoti plaši tiek izmantotas rotējošas vārpstas, galvenokārt kā mehāniskā griezes momenta pārvadi. Aprēķinos parasti pieņem, ka vārpsta ap savu rotācijas asi ir simetriska, tomēr daudzos gadījumos tā nav, piemēram, gadījumā ja detaļu stiprina uz vārpstas ar ierievi. Rotējošo mašīnu konstruktori jau 1800. gadu beigās identificēja kritiskos apgriezienus kā tos darbības apgabalus, kuros ir novērojamas ļoti augstas vibrāciju amplitūdas. Pašsvārstību frekvences novērojamas visām mehāniskajām sistēmām. Situācija, kad rotējošās mašīnas ātrums sakrīt ar pašsvārstību frekvenci, tiek dēvēta par kritiskajiem apgriezieniem jeb balansa rezonansi. Šādā gadījumā jebkurš, pat mazākais debalanss ierosina pašsvārstības frekvences svārstības. Tā kā ideālu vārpstu nav, kritiskās frekvences pastāv visām vārpstām.

Vibrāciju amplitūdu ierobežo tikai sistēmas vibrāciju slāpēšana, kas tipiski ir ļoti zema, ja vien netiek izmantotas ierīces ar augstu slāpēšanas koeficientu kā viskozās slāpēšanas ierīces. Normāla prakse ir operēt sistēmu subkritiskajā joslā (pirms vai zem kritiskajiem apgriezieniem), vai arī ātri pāriet uz superkritisko joslu (virs kritiskajiem apgriezieniem), ja savādāk nav iespējams. Darbība kritisko apgriezienu joslā vai tuvu tai bez attiecīgas vibrāciju slāpēšanas var būt ļoti destruktīva, jo rezultējošā rotora vibrāciju amplitūda, augstie gultņu reakciju spēki, rotoru strīķēšanās un komponentu dinamiskā nobīde nelabvēlīgi ietekmēs mašīnas darba laiku un sniegumu.

2. Matemātiskais modelis

Apskatām situāciju, kad vārpstas šķēlumam ir dažādi inerces momenti (1. attēlā), t.i. vārpstas šķēlums nav apaļš, piemēram, vārpsta ar ķīļiem. Galvenā atšķirība no simetriskas vārpstas ir dažādi vārpstas lieces stingumi dažādos virzienos.

Matemātiskais modelis ņemts no [1]. Izvēloties vārpstai divus stingumus c_1 un c_2 ar fāzu nobīdi $\pi/2$, pašsvārstību frekvence p dalās divās komponentēs p_1 1. attēls. Vārpsta ar dažādiem inerces momentiem



un p_2 , kur tie ir nobīdīti par $\pi/2$, lai izteiktu vārpstas dažādos lieces stingumus. Koordinātu sistēma rotē vienmērīgi ar vārpstas rotācijas frekvenci ω un asis ir paralēlas šķēlumiem, pēc kuriem ņemti p_1 un p_2 . Iegūstam kustības vienādojumu (1):

$$\begin{cases} -c_1 y - m\ddot{y} + m\omega^2 y + 2m\omega\dot{z} = 0; \\ -c_2 z - m\ddot{z} + m\omega^2 z - 2m\omega\dot{y} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

c_1 un c_2 tiek aizvietoti ar formulām (2):

$$c_1 = mp_1^2; \quad c_2 = mp_2^2, \quad (2)$$

kur p_1 un p_2 – nerotējošas sistēmas pašsvārstību frekvences. Iegūstam (3):

$$\begin{cases} \ddot{y} + (p_1^2 - \omega^2)y - 2\omega\dot{z} = 0; \\ \ddot{z} + (p_2^2 - \omega^2)z + 2\omega\dot{y} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

no kurienes izsaka paātrinājumus (4):

$$\begin{cases} \ddot{y} = -(p_1^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{z}; \\ \ddot{z} = -(p_2^2 - \omega^2)z - 2\omega\dot{y}. \end{cases} \quad (4)$$

3. Simulācija

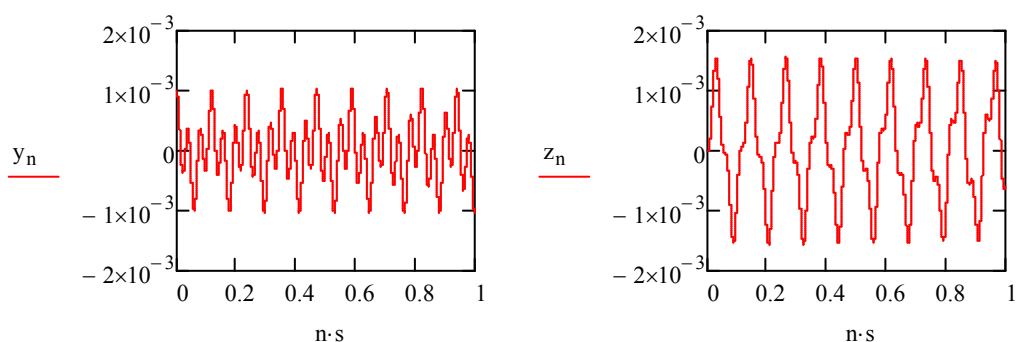
Modelējam vienādojumus (4) programmā MATHCAD.

$$\begin{aligned} m &:= 10 & \omega &:= 450 & p_1 &:= 600 \\ n &:= 0..100000 & s &:= 0.00001 & p_2 &:= 500, \end{aligned}$$

kur m – vārpstas masa, ω – vārpstas leņķiskais ātrums, p_1 – vārpstas pašsvārstību frekvence pa plakni 1, p_2 – vārpstas pašsvārstību frekvence pa plakni 2, kas perpendikulāra plaknei 1, n – integrēšanas soļu skaits, s – integrēšanas soļa platums.

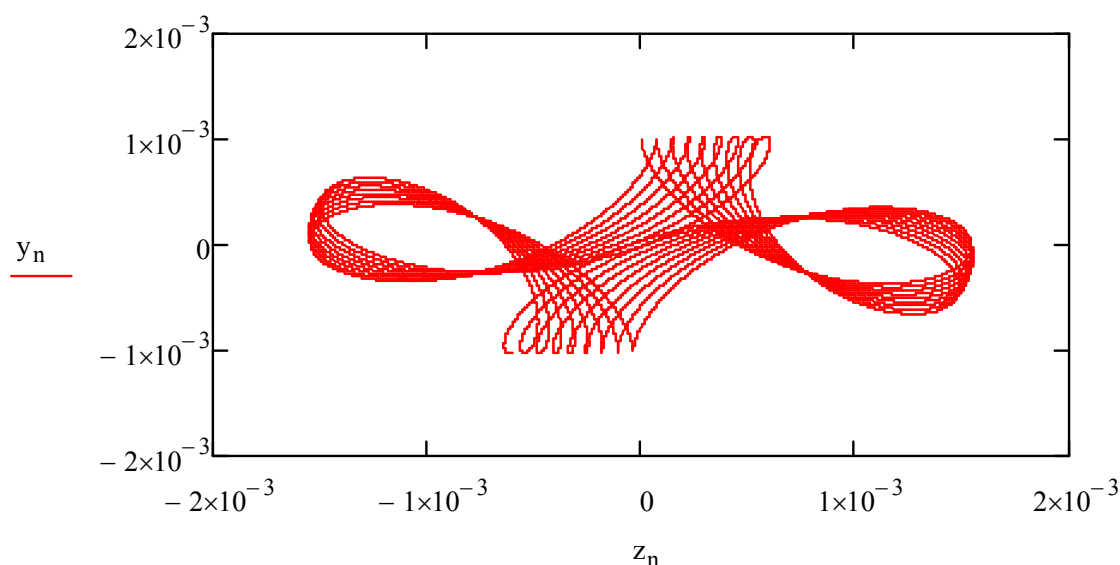
$$\begin{pmatrix} y_0 \\ vy_0 \\ z_0 \\ vz_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ vy_{n+1} \\ z_{n+1} \\ vz_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} y_n + s \cdot vy_n \\ vy_n + \frac{s}{m} \left[-(p1^2 - \omega^2) \cdot y_n + 2 \cdot \omega \cdot vz_n \right] \\ z_n + s \cdot vz_n \\ vz_n + \frac{s}{m} \left[-(p2^2 - \omega^2) \cdot z_n - 2 \cdot \omega \cdot vy_n \right] \end{bmatrix} \quad (5)$$

Aprēķins tiek veikts pēc Eilera metodes [2], aprēķinot katra punkta sākuma nosacījumus, izmantojot iepriekšējā punkta rezultātu. Katrā piemērā redzamas 2 matricas, kuru rindu skaitu nosaka kustības brīvību skaits (5). Tipiskas ir pāra rindu matricas, no kurām katrs pāris sastāv no pārvietojuma argumenta un ātruma argumenta. Pirmajā matricā tiek uzdoti sākuma nosacījumi, otrajā ir aprēķina dzinējs un ārējās figūriekavās spēku summas katrai kustības brīvībai (5). Rezultātu var iegūt grafiski, kur redzami pārvietojumu grafiki pa asīm atkarībā no laika (2. attēlā), kā arī kustība fāzu plaknē (3. attēlā).

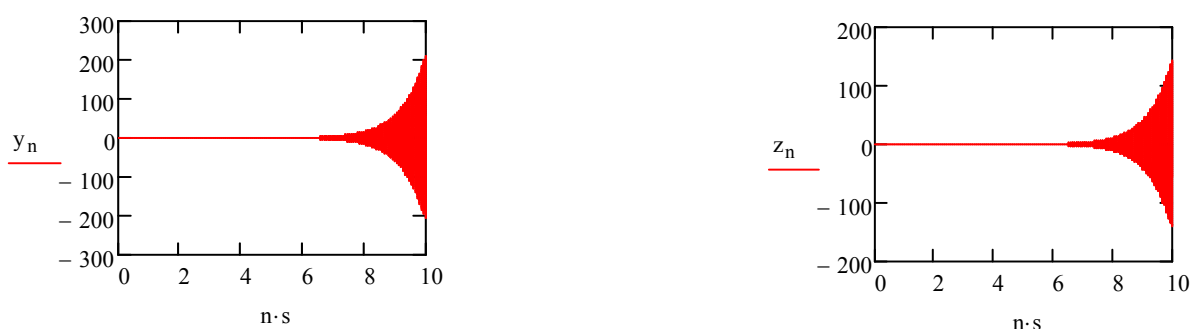


2. attēls. Šķēlumu pārvietojumi laikā pa y un z asīm

Pašsvārstību frekvences $p1$ un $p2$ izvēlētas salīdzinoši tuvā diapazonā, jo praksē, piemēram, ierīvis nerada lielas šķēlumu inerces momentu starpības.



3. attēls. Kustība fāzu plaknē

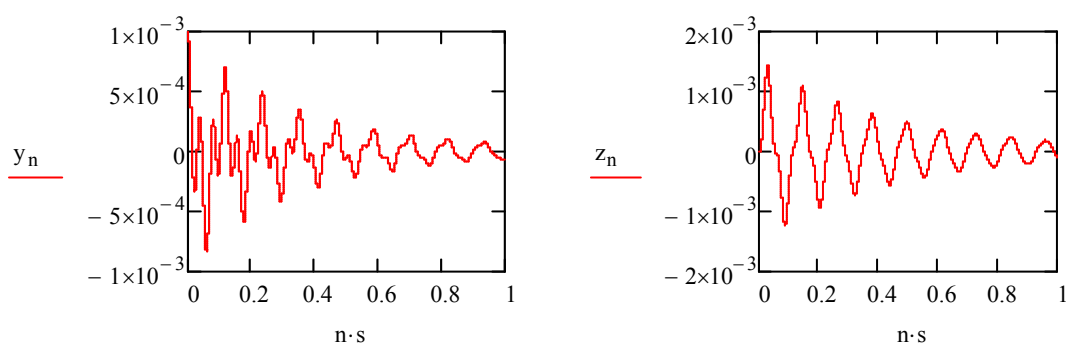


4. attēls. Kustības nestabilitāte

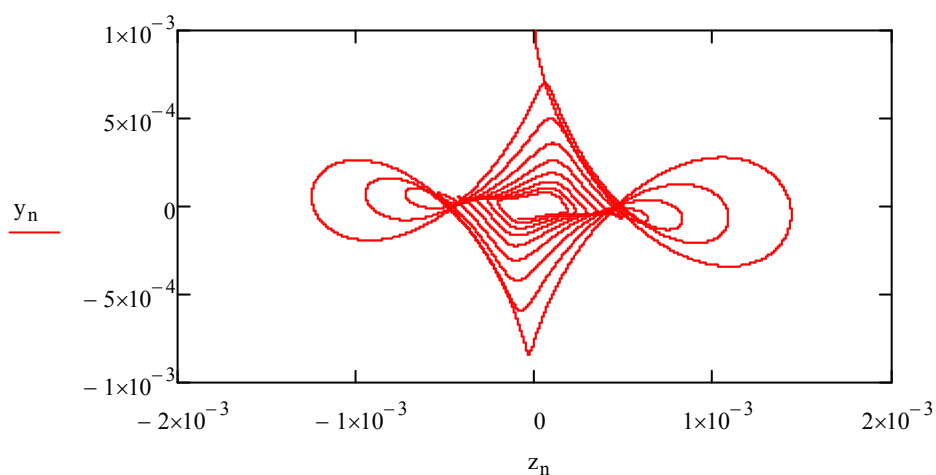
Ievērojot faktu, ka dotajai sistēmai nav ne atsperojuma, ne vibrāciju slāpēšanas, kustība ir salīdzinoši stabila (2. un 3. attēls), tomēr ievērojami palielinot integrēšanas soļu skaitu (4. attēls), konstatējama nestabilitāte. Lai objektīvāk novērtētu vārpstas uzvedību kritisko apgriezību tuvumā, pievienojam stinguma koeficientu c un slāpēšanas koeficientu b (6) [3].

$$\begin{aligned}
 \omega &:= 450 & p1 &:= 600 & b &:= 60 \\
 n &:= 0..100000 & s &:= 0.00001 & p2 &:= 500 & c &:= 100
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ vy_0 \\ z_0 \\ vz_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ vy_{n+1} \\ z_{n+1} \\ vz_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} y_n + s \cdot vy_n \\ vy_n + \frac{s}{m} \left[-(p1^2 - \omega^2) \cdot y_n + 2 \cdot \omega \cdot vz_n - b \cdot vy_n - c \cdot y_n \right] \\ z_n + s \cdot vz_n \\ vz_n + \frac{s}{m} \left[-(p2^2 - \omega^2) \cdot z_n - 2 \cdot \omega \cdot vy_n - b \cdot vz_n - c \cdot z_n \right] \end{bmatrix} \quad (6)$$

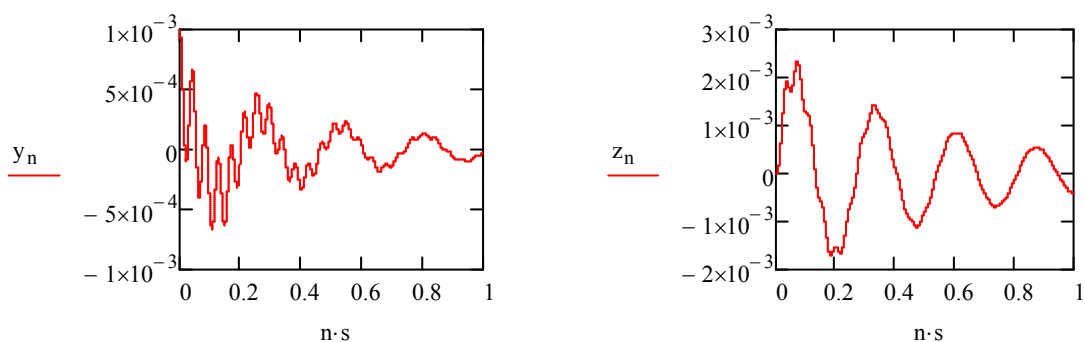


5. attēls. Šķēlumu pārvietojumi laikā pa y un z asīm

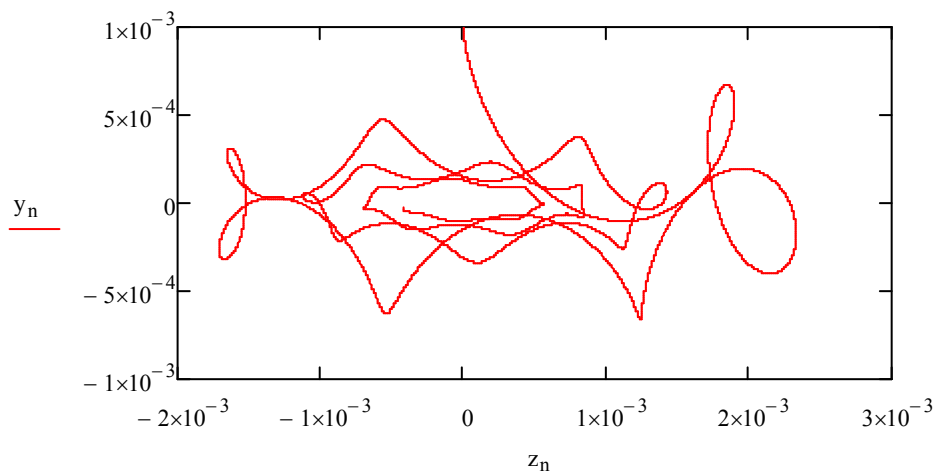


6. attēls. Kustība fāzu plaknē

Kā redzams 5. un 6. attēlā, kustības ir izteikti slāpētas. Palielinām vārpstas rotācijas frekvenci $\omega=490$ - tuvu pirmajai pašsvārstību frekvencei $p1=500$:

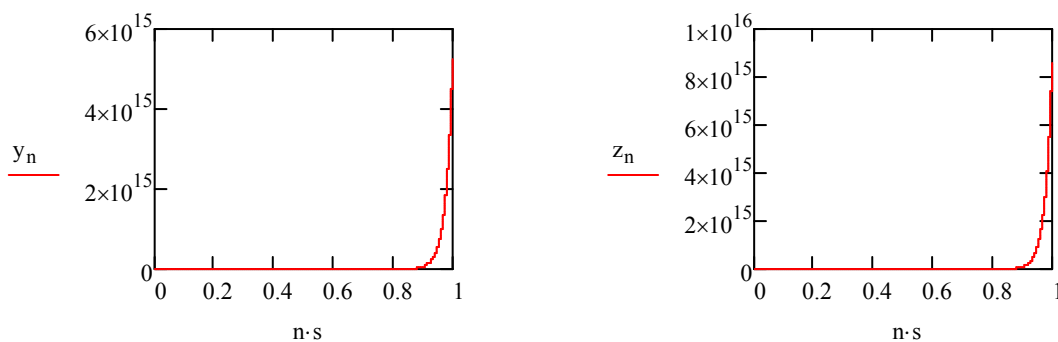


7. attēls. Šķēlumu pārvietojumi laikā pa y un z asīm



8. attēls. Kustība fāzu plaknē

Kustības haotiskas, bet slāpētas (7. un 8. attēls). Palielinām rotācijas frekvenci līdz 550, kas ir vidējā vērtība starp $p1=500$ un $p2=600$ (8. attēls).



9. attēls. Šķēlumu pārvietojumi laikā pa y un z asīm

Novērojama izteikta sistēmas nestabilitāte ar strauji kāpjošiem pārvietojumiem (9. attēls). Šādas parādības novērojamas, kad sistēma atrodas kritisku apstākļu robežās, piemēram kritisko apgriezienu zonā. Mainot rotācijas frekvenci uz jebkuru vērtību starp pašsvārstību frekvenču vērtībām, iegūstam ļoti līdzīgus rezultātus, kuru kopējais raksturojums ir sistēmas nestabilitāte laikā.

4. Secinājumi

Darbinot sistēmu, kurā ir vārpstas ar dažādiem inerces momentiem, kritiskajā apgriezienu zonā vai tuvu tai, novērojams straujš amplitūdas kāpums. Pie tam sistēma ir nestabila visā apgriezienu zonā, ko ierobežo vārpstas dažādās pašsvārstību frekvences, kas apstiprina faktu, ka šīs rotācijas frekvences arī atrodas kritisko apgriezienu joslā. Tas apliecina, ka vārpstām ar dažādiem inerces momentiem pa šķēlumu kritiskā apgriezienu josla ir visā posmā no pirmās pašsvārstību frekvences līdz pēdējai [1], kas būtiski paplašina kritisko apgriezienu joslu. Šis efekts var stipri apgrūtināt to mehānismu ekspluatāciju, kuru vārpstas ar dažādiem inerces momentiem tiek darbinātas virs kritisko apgriezienu robežas, jo šādā gadījumā pārejas process ir daudz bīstamāks, ņemot vērā faktu, ka tas aizņem vairāk laika. Uzkavējoties kritisko apgriezienu zonā, ir ļoti viegli panākt vārpstas vibrāciju amplitūdas palielināšanos līdz tādām līmenim, kas pārsniedz ekspluatācijas pielāides, kā arī vārpstas spēju pretoties sabrukumam.

Literatūra

1. Диментберг Ф., Шаталов К. Колебания машин - Машиностроение, 1964.
2. <http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/mordifeqs/euler.html>
3. Кеpe O., Вiba J. Theoretical Mechanics - Riga, 1982.

Kovals E., Cimanskis J. Kritiskie apgriezieni vārpstai, kuras šķēlumam ir dažādi inerces momenti

Apskatīta kritisko apgriezienu josla rotējošām vārpstām ar dažādiem inerces momentiem pa šķēlumu. Pētniecības darbā izmantota simulācijas programma Mathcad un pielietota Eilera skaitliskā metode. Simulācijas rezultātā iegūti aptuveni vārpstu pārvietojumi laikā pa divām perpendikulārām asīm. Vārpstas ar dažādiem inerces momentiem pa šķēlumu tiek plaši pielietotas industrijā. Augstu apgriezienu mašīnās, kur vārpstas rotē ar apgriezieniem, kas pārsniedz kritisko apgriezienu robežu, ir īpaši jāuzmanās, lai mehānisms netiktu darbināts kritisko apgriezienu joslā vai tuvu tai, jo šāds režīms bieži pārsniedz normālās darba slodzes un var kļūt ļoti destruktīvs. Vārpstām, kuru šķēlumiem ir dažādi inerces momenti, kritisko apgriezienu josla ir visā posmā starp tām pašsvārstību frekvencēm, kuras atbilst attiecīgā šķēluma vārpstas stingumiem. Līdz ar to,

palielinoties starpībai starp attiecīgo šķēlumu vārpstas stingumu pašsvāstību frekvencēm, palielinās kritiskās apgriezienu joslas platums. Šis fenomens ir jāņem vērā, projektējot augstu apgriezienu rotorus.

Kovals E., Cimanskis J. The critical speed of a shaft with different moments of inertia in cut plane

The zone of the critical rotating speeds has been reviewed for shafts with different moments of inertia in cut plane. The simulation software Mathcad and Euler's numerical method has been used in the research. As the result of the simulation displacements of a shaft in two perpendicular planes have been found. Shafts with different moments of inertia in cut plane are common in modern industry. Having a high-speed rotating machinery running above the critical speed zone one must be particularly cautious not to run the machinery at or near the critical speed zone. Running in this zone usually causes forces many times exceeding the normal work load that can become destructive. Shafts with different moments of inertia in cut plane have the critical speed zone all the way beginning with the first natural frequency according to the first cut plane stiffness and ending with the last natural frequency according to the last cut plane stiffness. This phenomenon is of major importance in hi-speed machinery designing.

Ковалс Э., Циманскис Ю. Критические скорости вращения вала, сечение которого имеет различные главные моменты инерции

Рассмотрена зона критической скорости вращения вала, сечение которого имеет различные главные моменты инерции. Валы такого типа широко применяются в современном производстве. Эксплуатируя машины на скоростях, превышающих критические скорости вращения, надо особенно опасаться работы на критической скорости вращения или близкой к ней, поскольку такой режим работы развивает силы намного превышающих силы нормальной рабочей нагрузки и может являться разрушительным. Валы, сечение которых имеют различные главные моменты инерции, неустойчивы в интервале с первой критической скорости, которая соответствует первому моменту инерции по сечению, до последней критической скорости, которая соответствует последнему моменту инерции по сечению. В связи с этим фактом ширина критической зоны увеличивается при увеличении разницы между критическими скоростями при разных моментах инерции. Этот факт должен учитываться, проектируя высокочастотные роторы.