RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Transporta un mašīnzinību fakultāte
Transportmašīnu tehnoloģiju institūts

Andrejs KAŠURINS
Doktora studiju programmas
„Transports” doktorants

OPTIMĀLĀ APKALPOŠANAS OBJEKTU IZVIETOŠANA ESOŠAS TRANSPORTA INFRASTRUKTŪRAS GADĪJUMĀ

Promocijas darba kopsavilkums

Zinātniskais vadītājs
Dr. habil. sc. ing., profesors
A.ANDRONOVS

Rīga 2011

UDK 656.01:519.863(043.2)
Ka 780-o

Kašurins A. Optimālā apkalpošanas objektu izvietošana esošas transporta infrastruktūras gadījumā. Promocijas darba kopsavilkums.- R.:RTU, 2011.-41 lpp.

Iespiests saskaņā ar "RTU P-20" promocijas padomes 2011. gada 29.augusta lēmumu, protokols Nr. 02/2011.

Ieguldījums Tavā nākotnē!

Šis darbs izstrādāts ar Eiropas Sociālā fonda atbalstu projektā «Atbalsts RTU doktora studiju īstenošanai».

ISBN

PROMOCIJAS DARBS
IZVIRZĪTS INŽENIERZINĀTŅU
DOKTORA GRĀDA IEGŪŠANAI
RĪGAS TEHNISKAJĀ UNIVERSITĀTĒ

Promocijas darbs inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai tiek publiski aizstāvēts 2011. gada 6. decembrī plkst. 14:30, Rīgas Tehniskās universitātes TMF Transportmašīnu tehnoloģiju institūtā Lomonosova ielā 1, korpusā V, 218. auditorijā.

OFICIĀLIE RECENZENTI:

Profesors, Dr. habil. sc. ing. Jurijs Merkurjevs
Rīgas Tehniskā universitāte, Latvija

Profesore, Dr. sc. ing. Irina Jackiva
Transporta un sakaru institūts, Latvija

Profesors, Ph.D. Kalev Pärna
Tartu universitāte, Igaunija

APSTIPRINĀJUMS

Apstiprinu, ka esmu izstrādājis doto promocijas darbu, kas iesniegts izskatīšanai Rīgas Tehniskajā universitātē inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai. Promocijas darbs nav iesniegts nevienā citā universitātē zinātniskā grāda iegūšanai.

Andrejs Kašurins……………………………. (Paraksts)

Datums: 2011. gada 1. novembrī

Promocijas darbs ir uzrakstīts angļu valodā, satur ievadu, 8 nodaļas, secinājumus, literatūras sarakstu, 6 pielikumus, 45 zīmējumus un ilustrācijas, kopā 161 lappuse. Literatūras sarakstā ir 81 nosaukums.

ANOTĀCIJA

Promocijas darbu «Optimālā apkalpošanas objektu izvietošana esošas transporta infrastruktūras gadījumā» izstrādājis Andrejs Kašurins inženierzinātņu doktora zinātniskā grāda iegūšanai. Darba zinātniskais vadītājs ir Dr. habil. sc. ing., profesors Aleksandrs Andronovs.

Promocijas darba mērķis ir izstrādāt matemātiskus modeļus, metodes, algoritmus un datorprogrammas, kas ļauj risināt optimālo apkalpošanas objektu izvietošanas uzdevumu esošās transporta infrastruktūras gadījumā, kā arī izpētīt to efektivitāti un pielietot iegūtos rezultātus praksē. Optimālā apkalpošanas objektu izvietošana ir praktiski nozīmīgs uzdevums. Pastāv dažādi apkalpošanas veidi: tehniskā apkalpošana, medicīniskā palīdzība, sporta bāzes izmantošana utt. Optimālo izvietošanas uzdevumu nepieciešams risināt, piemērojot dažādus faktorus, vispirms izmantojot eksistējošo infrastruktūru.

Šajā sakarā tika izvirzīti un atrisināti sekojoši uzdevumi:

- Iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā datu analītiskais apraksts. Tas ļauj noteiktām Latvijas teritorijas koordinātēm aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu.
- Matemātiskā modeļa izstrāde apkalpojošo objektu optimālajam telpiskajam izvietošanas uzdevumam. Šim nolūkam tiek izmantotas mūsdienīgas optimizācijas teorijas metodes.
- Specializētas datorprogrammas izstrāde Mathcad un MATLAB vidē augstākminēto uzdevumu atrisināšanai.
- Izstrādāto metožu un programmu eksperimentālais pētījums. Tika parādīta ģenētiskā algoritma priekšrocība salīdzinot ar algoritmiem, kuri tiek pamatoti uz gradienta metodēm daudzekstrēmu uzdevumu (multiextreme problems) atrisināšanai. Tika noteikts, ka vislabākos rezultātus dos ģenētiskā algoritma un gradienta metodes kombinācija.
- Optimālās apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas praktiskā uzdevuma atrisināšana, pamatojoties uz izstrādātajiem modeļiem, metodēm un algoritmiem, izmantojot izstrādātas datorprogrammas.

SATURS

1. IEVADS

Promocijas darbs «Optimālā apkalpošanas objektu izvietošana esošas transporta infrastruktūras gadījumā» veltīts apkalpošanas objektu telpiskās izvietošanas problēmai, kas balstīta uz modernām matemātiskajām metodēm, tādām kā varbūtības teorija, nelineārā optimizācija un ģenētiskais algoritms.

1.1. Problēmas aktualitāte

Apkalpošanas objektu izvietošana gan šobrīd, gan iepriekš ir bijis vispāratzīts Operāciju Izpētes (Operation Research) pētīšanas lauks. Par to liecina daudzi žurnāli un grāmatas [18]. Amerikas Matemātikas Biedrība (American Mathematical Society) pat ir izveidojusi specifiskus kodus izvietošanas problēmām (90B80 diskrētai izvietošanai, 90B85 nepārtrauktai izvietošanai). Tomēr izvietojuma modeļu pielietojuma jautājums joprojām paliek atklāts [38].

Apkalpošanas objektu izvietošanas galvenā problēma ietver sevī telpiski sadalītu klientu kopu un apkalpošanas objektu kopu, kas apmierina klientu vajadzības [18], [52]. Risināmie jautājumi ir sekojoši:

• Kuriem apkalpošanas objektiem jābūt izmantotiem (atvērtiem)?

• Kurus klientus vajadzētu apkalpot un no kura apkalpošanas objekta (apkalpošanas objektiem), lai samazinātu kopējās izmaksas [38]?

Apkalpošanas objektu izvietošana ir pazīstama arī kā izvietošanas analīze (location analysis), tā ir operāciju izpētes nozare, kas pa tiešo attiecās uz matemātisko modelēšanu un problēmu risināšanu, kas skar optimālo apkalpošanas objektu izvietošanu, lai samazinātu transporta izmaksas, izvairītos no bīstamo materiālu izvietojuma blakus dzīvojamām zonām utt. Izvietošanas modeļus izmanto dažādiem pielietojumiem, tādiem kā – noliktavu izvietošana piegādes ķēdes robežās, lai samazinātu vidējo laika patēriņu līdz realizācijas tirgum, indīgu materiālu izvietošana, lai palielinātu attālumu līdz sabiedriskajām vietām utt.

Optimālā apkalpošanas objektu izvietošana ir ļoti svarīgs praktisks uzdevums. Galvenais mērķis ir samazināt klientu vajadzību kopas apmierināšanas izmaksas attiecībā uz kādu ierobežojuma kopu. Apkalpošanas objektu izvietošanas risinājumi ir kritiski elementi stratēģiskajā plānošanā plašam privātfirmu un sabiedrisko firmu diapazonam [77].

Visu apkalpošanas objektu izvietošanas problēmu variantu pamatuzdevums ir sekojošs: kompānija vēlās atvērt kādu apkalpošanas objektu skaitu, lai apkalpotu savus klientus. Gan apkalpošanas objekta atvēršana noteiktā zonā, gan atsevišķa klienta apkalpošana caur apkalpošanas objektu izmaksā noteiktu summu. Mērķis ir samazināt pilnās izmaksas, kas saistītas ar apkalpošanas objektu atvēršanas veidu un klientu apkalpošanu [22].

Kā apkalpošanas objekti kalpo vienas klases objekti, kas apmierina sekojošas prasības:

• Visi objekti ir viena tipa, t.i., tie veic vienus un tos pašus ražošanas vai transporta uzdevumus;

• Visi klienti, kas izmanto atbilstošos pakalpojumus, principā var izmantot jebkura objekta pakalpojumu.

Kā piemēru var minēt:

• Tehniskās apkopes stacijas;

• Uzpildes stacijas;

• Sporta bāzes utt.

Mūsu darbā tiek apskatīts apkalpošanas objektu izvietošanas uzdevums Latvijas teritorijā. Ir nepieciešams izvietot noteiktu objektu skaitu, lai samazinātu zaudējuma funkciju (transporta izdevumus). Šī problēma tiek risināta, izmantojot apkalpojamā objekta izvietojuma blīvuma funkciju un pieņemto zaudējuma funkciju.

1.2. Promocijas darba mērķi un uzdevumi

Promocijas darba mērķis ir:

Matemātisko modeļu, metožu un datorprogrammu izstrāde apkalpošanas objektu optimālajam izvietošanas uzdevumam.

Līdz ar to tika apskatīti sekojoši uzdevumi:

1. Apkalpošanas objektu optimālās izvietošanas eksistējošo metožu un modeļu izpēte.
2. Iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā statistiskais apraksts.
3. Informatīvās datu bāzes izstrāde, kas satur statistiskos datu apkopojumu par Latvijas reģioniem.
4. Iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā datu analītiskā apraksta izstrāde. Tas ļauj noteiktām Latvijas koordinātēm aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu.
5. Matemātiskā modeļa izstrāde apkalpojošo objektu optimālās telpiskās izvietošanas problēmas atrisināšanai.
6. Skaitliskās optimizācijas (numerical optimization) principu apraksts un dažu eksistējošo optimizācijas skaitlisko metožu un algoritmu apskats.
7. Optimizācijas metožu pilnveidošana izstrādātajam matemātiskajam modelim.

8. Izstrādāto optimizācijas metožu efektivitātes pētīšana.
9. Specializētu datorprogrammu izstrāde piedāvātajām optimizācijas metodēm.
10. Optimālo apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas Latvijas teritorijā praktiskā uzdevuma apskatīšana, pamatojoties uz izstrādātajiem modeļiem, metodēm un algoritmiem, izmantojot izstrādātas datorprogrammas.

1.3. Promocijas darba pētījuma metodes

Promocijas darba pētījums balstās uz:

1. Mūsdienīgām optimizācijas metodēm un algoritmiem, tādiem kā līnijas meklēšanas metode (line search methods (step length, the Wolfe conditions, backtracking line search)), gradienta optimizācija, kvazi-Ņūtona metodes (quasi-Newton methods (BFGS method)) un ģenētiskais algoritms.
2. Varbūtības teorijas un matemātiskās statistikas metodēm.
3. Statistiskiem datiem, kas iegūti no *LR Centrālās statistikas pārvaldes* (*LR CSP*) un Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrijas Sporta departamenta datu bāzes "Sporta bāzu reģistrs", kura bija radīta, sadarbojoties ar promocijas darba autoru.
4. Zinātnisko literatūru, publikācijām un interneta resursiem, kas veltīti pētāmajām problēmām.
5. Datorprogrammas nepieciešamajiem aprēķiniem un pētījumiem, kas radītas PTC Mathcad 14, MathWorks MATLAB R2009b vidē.

1.4. Zinātniskā novitāte

Promocijas darba novitāte saistīta ar:

1. Iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā datu analītisko aprakstu. Tas ļauj noteiktām Latvijas koordinātēm aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu.
2. Optimālo apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas oriģinālo matemātisko modeli.
3. Uzlaboto optimizācijas metodi, kur tiek izmantota ģenētiskā algoritma un gradienta metodes kombinācija.

4. Specializētās datorprogrammas paketes izstrādi optimālo apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas uzdevuma risināšanai.

1.5. Promocijas darba praktiskā nozīme

1. Uz iegūto rezultātu bāzes tika sagatavota daļa priekšmeta „Inženieruzdevumu risināšanas datormetodes” lekciju un praktisko darbu Rīgas Tehniskās universitātes Transportmašīnu Tehnoloģiju Institūta maģistratūras pirmā kursa studentiem.
2. Autora izstrādātie iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā apraksta modeļi un metodes tika izmantoti zinātniskajā projektā „Matemātisko modeļu, algoritmu un datorprogrammu izstrādāšana Latvijas transporta sistēmas analīzei, attīstības prognozēšanai un optimizācijai”, kas bija zinātniskā projekta “Zinātniskās darbības attīstība augstskolās” daļa un realizējās no 2008. gada 1. jūnija līdz 31. decembrim.
3. Atbilstoši Sporta likuma 12. pantam „Sporta bāzes”, Nacionālajai sporta attīstības programmai 2006.–2012. gadam (apstiprināta ar Ministru kabineta 2006. gada 31. oktobra rīkojumu Nr. 838) un Ministru kabineta 2004. gada 24. augusta sēdei (prot. Nr. 50 28. §) (minētie lēmumi saskan ar Latvijas Nacionālajā attīstības plāna uzdevumiem (Ministru kabineta 2006. gada 4. jūlija noteikumi Nr. 564)) jaunu vieglatlētikas manēžu optimālā izvietojuma Latvijas teritorijā problēma risināta sadarbībā ar Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrijas Sporta departamentu.
4. Iegūtos modeļus un algoritmus var izmantot privātfirmas un valsts firmas optimālai apkalpošanas objektu izvietošanai, piemēram, automobiļu tehniskās apkopes stacijas, sporta bāzes, degvielas uzpildes stacijas u.c.

1.6. Promocijas darba struktūra

1. nodaļa. Optimālo apkalpojošo objektu izvietošanas metodes un modeļi. Tika aprakstīta apkalpošanas objektu optimālās izvietošanas problēma. Tika apskatītas vairākas attāluma funkciju iestatījumu pieejas. Tika analizēti dažādi izvietošanas problēmu matemātiskie modeļi un metodes.

2. nodaļa. Iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā statistiskais apraksts. Šī nodaļa veltīta iedzīvotāju sadalījuma Latvijas teritorijā statistisko datu analīzei. Rezultātā tika iegūta iedzīvotāju blīvuma analītiskā izteiksme. Tas ļauj noteiktām Latvijas koordinātēm aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu.

Pamatojoties uz to, ir risināts sekojošs uzdevums: tiek atrasts vidēji svērtais Latvijas centrs, t.i., tādas koordinātes, līdz kurām ir minimāls summārais attālums no visiem Latvijas punktiem (ņemot vērā iedzīvotāju blīvumu). Nepieciešamā statistiskā informācija tika iegūta no LR Centrālās statistikas pārvaldes.

3. nodaļa. Eksistējošo optimizācijas skaitlisko metožu apskats. Šajā nodaļā apskatīti daži skaitliskās optimizācijas un dažu eksistējošo metožu principi. Tika aprakstītas mūsu darbā izmantotās nelineārās optimizācijas metodes un algoritmi (the line search, the Wolfe conditions, the backtracking line u.c.).

4. nodaļa. Apkalpošanas objektu telpiskā izvietojuma matemātiskais modelis. Tika noteikts sekojošs uzdevums. Ir zināma blīvuma funkcija un attāluma funkcija. Izvietojuma efektivitātes kritērijs ir zaudējumu vidējā kopējā summa, t.i., transporta izdevumi. Ir nepieciešams izvietot noteiktu objektu skaitu, lai samazinātu zaudējuma funkciju. Tika aplūkoti viendimensijas un divdimensiju problēmu gadījumi.

5. nodaļa. Gradienta un kvazi-Ņjūtona optimizācijas algoritmi. Abi algoritmi tiek izmantoti optimālai apkalpojošo objektu telpiskai izvietošanai. Izstrādātā meklēšanas procedūra apmierina Vulfa noteikumus (the Wolfe conditions). Kā piemērs tika apskatīta 4 apkalpojošo objektu izvietošana Latvijas teritorijā.

6. nodaļa. Ģenētiskais algoritms. Šī nodaļa veltīta funkciju optimizācijai, izmantojot evolūcijas algoritmu, tādu kā ģenētiskais algoritms. Tika aprakstīts kanoniskais ģenētiskais algoritms. Tika apskatīts ģenētiskā algoritma pielietojums optimālās apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas problēmas risināšanai. Lai novērtētu algoritma efektivitāti, tika izstrādāts eksperimentu plāns. Tika veikti skaitliskie eksperimenti. Labākie rezultāti tika iegūti ar ģenētiskā algoritma un gradienta metodes kombināciju.

7. nodaļa. Programmu apraksts. Tika aprakstītas datorprogrammas optimālai apkalpojošo objektu izvietošanai. Tika izstrādātas divas galvenās programmas. Pirmā programma (gradienta un kvazi-Ņūtona optimizācija) tika uzrakstīta Mathcad vidē. Otrā programma (ģenētiskā algoritma optimizācija) tika uzrakstīta MATLAB vidē. Tika apskatīta programmu struktūra, funkcijas, mainīgie un sintakse.

8. nodaļa. Apskatīto metožu pielietojums. Tika apskatīta vieglatlētikas manēžu aktuālā telpiskās izvietošanas problēma. Ir zināma blīvuma funkcija un attāluma funkcija. Ir nepieciešams izvietot noteiktu objektu skaitu, lai samazinātu zaudējuma funkciju (transporta izdevumus). Eksistējošo vieglatlētikas manēžu saraksts un koordinātes ir ņemtas no Latvijas Republikas

Izglītības un zinātnes ministrijas Sporta departamenta datu bāzes “Sporta bāzu reģistrs” (http://sportabazes.izm.gov.lv/sbdb/). Iegūtos rezultātus atzinīgi novērtēja Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrija.

1.7. Aizstāvamās tēzes

Autors šajā darbā aizstāv:

1. Matemātisko modeļu izstrādi apkalpošanas objektu optimālajam izvietošanas uzdevumam.
2. Optimizācijas metožu un algoritmu izstrādi piedāvātajam matemātiskajam modelim.
3. Datorprogrammu izstrādi modeļu un metožu realizācijai.
4. Izstrādāto optimizācijas metožu efektivitātes pētīšanu.

1.8. Promocijas darba aprobācija

Par promocijas darba galvenajiem rezultātiem ziņots 9 starptautiskajās zinātniskajās konferencēs:

1. RTU 48. starptautiskā zinātniskā konference, 2007. gada 11.-13. oktobris, Rīga, Latvija
2. RTU 49. starptautiskā zinātniskā konference, Informācijas tehnoloģija un vadības zinātne, 2008. gada 13.-15. oktobris, Rīga, Latvija
3. RTU 49. starptautiskā zinātniskā konference, Transporta sistēmu vadības matemātiskās metodes, 2008. gada 13.-15. oktobris, Rīga, Latvija
4. RTU Inovāciju un jauno tehnoloģiju konference, 2009. gada 20.-21. janvāris, Rīga, Latvija
5. RTU 50. starptautiskā zinātniskā konference, 2009. gada 12.-16. oktobris, Rīga, Latvija
6. International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design, 2010. gada 19.-21. maijs, Klermonferāna, Francija
7. RTU 51. starptautiskā zinātniskā konference, 2010. gada 10.-15. oktobris, Rīga, Latvija
8. Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA2011), The 14th Conference of the ASMDA International, 2011. gada 7.-10. jūnijs, Roma, Itālija
9. 8th International Scientific and Practical Conference “Environment. Technology. Resources.”, 2011. gada 20.-22. Jūnijs, Rēzekne, Latvija

Promocijas darba autors ir 8 zinātniski pētniecisko publikāciju autors un līdzautors.

Publikāciju saraksts:

1. Andronovs A., Kashurin A. On a problem of spatial arrangement of service stations // Computer modelling and new technologies. - 2007, Vol.11, N. (2007), 31.-37. lpp.
2. Kashurin A. Statistical description of a distribution of population density over the Latvian territory // Scientific journal of RTU. 5th series. Datorzinātne. - Vol. 36 (2008), 108.-115. lpp.
3. Kashurin A. Problem of optimal spatial arrangement of service stations // Third international conference on accelerated life testing, Reliability-based analysis and design, France, Clermont-Ferrand, May 18-21, 2010. – 249.-254. lpp.
4. Kashurin A. A problem of arrangement of service stations on the given territory // Scientific journal of RTU. 6th series, Mašīnzinātne un transports. - 34. vol. (2010), 111.-116. lpp.
5. Kashurin A., Parkova I. Genetic algorithm of optimal spatial arrangement of service stations // Scientific proceedings of the 14th conference of the ASMDA International Society, Italy, Rome, June 7-10, 2011. – 667 lpp.
6. Parkova I., Kashurin A., Valishevsky A., Vilumsone A. Making decisions on arrangement of electronics in smart garment // Proceedings of the 8th International Scientific and Practical Conference "Environment. Technology. Resources.", Latvia, Rezekne, 20.-22. June, 2011. – 202-211 lpp.
7. Parkova I., Valishevsky A., Kashurin A., Vilumsone A. Integration of flexible keypad into clothing // Proceedings of the 8th International Scientific and Practical Conference "Environment. Technology. Resources.", Latvia, Rezekne, 20.-22. June, 2011. – 173-181 lpp.
8. Kashurin A. Application of the problem of optimal location of service stations // Scientific journal of RTU. Mašīnzinātne un transports, 6th series - Riga: RTU, 2011. - vol.34. Pieņemts publicēšanai.

2. PROMOCIJAS DARBA REZULTĀTU KOPSAVILKUMS

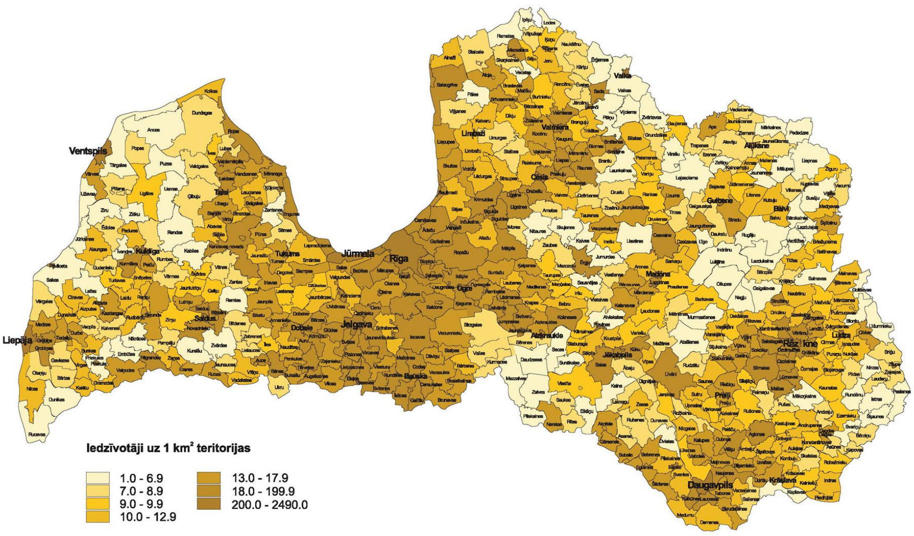
2.1. Iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā statistiskais apraksts

Daudziem praktiskiem uzdevumiem nepieciešams apraksts par iedzīvotāju izvietojumu noteiktā teritorijā. Līdz ar to tika izvirzīts uzdevums analītiskā formā aprakstīt pieejamos datus par iedzīvotājiem Latvijā.

Mūsu uzdevums sastāv no analītisko atkarību izstrādes, kas ļauj noteiktām Latvijas koordinātēm aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu.

Pamatojoties uz to, ir risināts sekojošs uzdevums: tiek atrasts vidēji svērtais Latvijas centrs, t.i., tādas koordinātes, līdz kurām ir minimāls summārais attālums no visiem Latvijas punktiem (ņemot vērā iedzīvotāju blīvumu).

Tabulās 2.1. un 2.2. attēloti dati par Latvijas iedzīvotājiem un Latvijas teritorijas pilsētu un rajonu laukumi, kā arī to koordinātes. Līdz 2009. gada 1. jūlijam Latvijas teritorija bija sadalīta 26 rajonos un 7 lielpilsētās. Visus statistiskos datus sniedza LR Centrālās statistikas pārvalde. Attēlā 2.1. parādīta Latvijas iedzīvotāju blīvuma karte. Informācijas avots: Latvijas Pašvaldību savienība (LPS, http://www.lps.lv). Dažādas krāsas parāda attiecīgo blīvumu noteiktos reģionos.



2.1. att. Latvijas iedzīvotāju blīvuma karte

2.1. tabula

Latvijas lielpilsētu raksturojumi

Indekss γ	Pilsēta	Koordināte z_γ	Koordināte y_γ	Iedzīvotāji $\hat{H}_\gamma$	Laukums P_γ km²
1	Rīga	190	150	722 485	307
2	Daugavpils	340	30	108 091	73
3	Jelgava	170	110	66 051	60
4	Jūrmala	150	180	55 408	100
5	Liepāja	10	100	85 477	60
6	Rēzekne	390	100	36 345	18
7	Ventspils	50	200	43 544	55

2.2. tabula

Latvijas rajonu raksturojumi

Indekss ι	Rajons	Koordināte z_ι	Koordināte y_ι	Iedzīvotāji $\hat{H}_\iota$	Laukums P_ι km²
1	Aizkraukles rajons	270	110	40 116	2 567
2	Alūksnes rajons	360	210	24 483	2 245
3	Balvu rajons	390	170	27 245	2 381
4	Bauskas rajons	210	100	50 988	1 881
5	Cēsu rajons	270	180	56 614	2 973
6	Daugavpils rajons	340	40	39 496	2 526
7	Dobeles rajons	130	100	37 980	1 632
8	Gulbenes rajons	340	180	26 281	1 876
9	Jelgavas rajons	170	110	36 941	1 605
10	Jēkabpils rajons	300	90	52 593	2 997
11	Krāslavas rajons	400	50	33 313	2 288
12	Kuldīgas rajons	60	150	35 822	2 500
13	Liepājas rajons	30	110	43 849	3 593
14	Limbažu rajons	230	230	37 798	2 602
15	Ludzas rajons	420	110	31 305	2 412
16	Madonas rajons	330	140	42 918	3 349
17	Ogres rajons	240	130	64 060	1 843
18	Preiļu rajons	340	80	38 317	2 042
19	Rēzeknes rajons	380	100	40 442	2 809
20	Rīgas rajons	210	150	161119	3 132
21	Saldus rajons	50	110	36 735	2 182
22	Talsu rajons	100	200	46 680	2 748
23	Tukuma rajons	130	150	54 813	2 457
24	Valkas rajons	300	220	31 723	2 441
25	Valmieras rajons	260	240	58 328	2 373
26	Ventspils rajons	60	190	13 945	2 462

Ir lietderīgi lielpilsētu un rajonu iedzīvotāju skaitu apskatīt atsevišķi.

Rajonu iedzīvotāji

Pieņemsim, ka ι ir rajona indekss, ι =1, 2, …, w, kur w ir apskatāmo rajonu indekss. Tālāk tiks izmantoti sekojoši apzīmējumi:

SR_ι ir ι-tā rajona teritorija (tās punkts $(z,y) \in SR_\iota$);
$\xi_\iota(z,y)$ ir ι-tā rajona indikatora funkcija:

$$\xi_\iota(z,y) = \begin{cases} 1, \ ja \ (z,y) \in SR_\iota, \\ 0, \ citādi, \end{cases}$$

$\hat{H}_\iota$ ir ι-tā rajona iedzīvotāji,
P_ι ir ι-tā rajona laukums, km^2,
h_ι ir ι-tā rajona iedzīvotāju blīvums: $h_\iota = \hat{H}_\iota / P_\iota$.

Mūsu aprēķina nosacījumos ir pieņemts katru rajonu aprakstīt ar apli. Latvijas teritorija sadalīta apļos, tās raksturojums dots 2.4. tabulā. Apļa rādiusu aprēķina pēc nosacījumiem, ka apļa laukums sakrīt ar rajona laukumu un viņu kopējā sakritība ir maksimāla. Pieņemsim, ka:

z_ι, y_ι, ir ι-tā rajona centra koordinātes
r_ι ir ι-tā rajona rādiuss, kas aprēķināts pēc formulas

$$r_\iota = \sqrt{P_\iota / \pi} \ . \tag{2.1}$$

Šajā gadījumā funkcija ξ_ι (z,y) ir aprakstīta sekojoši

$$\xi_\iota \ (z,y) = \begin{cases} 1, \ ja \ \ (y_\iota - r_\iota < y < y_\iota + r_\iota) \wedge \left\lfloor z_\iota - \sqrt{(r_\iota)^2 - (y - y_\iota)^2} < z < z_\iota + \sqrt{(r_\iota)^2 - (y - y_\iota)^2} \right\rfloor \\ 0, \ citādi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Tiek pieņemts, ka iedzīvotāju blīvums visā rajonā ir vienmērīgs. Tāpēc iedzīvotāju blīvums punktā (z,y) ir aprakstīts sekojoši

$$f^{(r)}(z,y) = \sum_{i=1}^{w} h_\iota \xi_\iota (z,y) \, . \tag{2.3}$$

Lielpilsētu iedzīvotāji

Tagad tiks apskatītas lielpilsētas.

Pieņemsim, ka γ ir pilsētas indekss, γ=1, 2, …, m, kur m ir apskatīto lielpilsētu skaits. Pieņemsim, ka:

SP_γ ir γ-tās pilsētas teritorija;

z_γ, y_γ, ir γ-tās pilsētas centra koordinātes;

$\psi_\gamma(z,y)$ ir γ-tās pilsētas indikatora funkcija:

$$\psi_\gamma(z,y)=\begin{cases} 1,\ ja\ (z,y) \in SP_\gamma, \\ 0,\ cit\bar{a}di. \end{cases}$$

Indikatora funkcija $\psi_\gamma(z,y)$ ir aprakstīta sekojoši

$$\psi_\gamma(z,y)=\begin{cases} 1,\ ja\ (y_\gamma - r_\gamma < y < y_\gamma + r_\gamma) \wedge \left[z_\gamma - \sqrt{(r_\gamma)^2 - (y-y_\gamma)^2} < z < z_\gamma + \sqrt{(r_\gamma)^2 - (y-y_\gamma)^2} \right] \\ 0,\ cit\bar{a}di. \end{cases} \quad (2.4)$$

z_γ, y_γ, - γ-tās pilsētas centra koordinātes;

r_γ –γ-tās pilsētas rādiuss r_γ aprēķināts pēc formulas (2.1).

Iedzīvotāju blīvumi pilsētās aprēķināti pēc formulas $h_\gamma = \hat{H}_\gamma / P_\gamma$, kur:

$\hat{H}_\gamma$ – γ-tās pilsētas iedzīvotāji;

P_γ – γ-tās pilsētas laukums, km^2.

γ-tās pilsētas iedzīvotāju sadalījuma blīvums aprakstīts ar divdimensiju normāla sadalījuma blīvumu:

$$f^{(p)}(z,y) = \frac{h_\gamma}{2\pi\sigma_\gamma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_\gamma^2} \left[(z-z_\gamma)^2 + (y-y_\gamma)^2 \right] \right\}, \quad (2.5)$$

kur σ_j ir iedzīvotāju sadalījuma blīvuma standartnovirze, kas aprēķināta pēc formulas:

$$\sigma_\gamma = \rho r_\gamma,, \quad (2.6)$$

kur ρ>0,5 – pilsētas pievilkšanas koeficients (coefficient of city’s attraction)

Vispārīga iedzīvotāju blīvuma izteiksme punktā (z, y) ir

$$f(z,y) = f^{(r)}(z,y) + \sum_{\gamma=1}^{m} \psi_\gamma(z,y) f^{(p)}(z,y). \quad (2.7)$$

Galvenie rajonu un pilsētu raksturlielumi attēloti tabulās 2.3. un 2.4.

2.3. tabula

Pilsētu iedzīvotāju blīvums, rādiuss un standartnovirze

Pilsēta	Blīvums	Rādiuss	σ_j
Rīga	2353,37	9,89	6,92
Daugavpils	1480,70	4,82	3,37
Jelgava	1100,85	4,37	3,06
Jūrmala	554,08	5,64	3,95
Liepāja	1424,62	4,37	3,06
Rēzekne	2019,17	2,39	1,68
Ventspils	791,71	4,18	2,93

2.4. tabula

Rajonu iedzīvotāju blīvums, un rādiuss

Pilsēta / Rajons	Blīvums	Rādiuss
Aizkraukles rajons	15,63	28,59
Alūksnes rajons	10,91	26,73
Balvu rajons	11,44	27,53
Bauskas rajons	27,11	24,47
Cēsu rajons	19,04	30,76
Daugavpils rajons	15,64	28,36
Dobeles rajons	23,27	22,79
Gulbenes rajons	14,01	24,44
Jelgavas rajons	23,02	22,60
Jēkabpils rajons	17,55	30,89
Krāslavas rajons	14,56	26,99
Kuldīgas rajons	14,33	28,21
Liepājas rajons	12,20	33,82
Limbažu rajons	14,53	28,78
Ludzas rajons	12,98	27,71
Madonas rajons	12,82	32,65
Ogres rajons	34,76	24,22
Preiļu rajons	18,76	25,50
Rēzeknes rajons	14,40	29,90
Rīgas rajons	51,44	31,57
Saldus rajons	16,84	26,35
Talsu rajons	16,99	29,58
Tukuma rajons	22,31	27,97
Valkas rajons	13,00	27,88
Valmieras rajons	24,58	27,48
Ventspils rajons	5,66	27,99

Latvijas vidēji svērtās koordinātes

Latvijas vidēji svērtās koordinātes ir punkts *(u, v)* , kuram ir jāatbilst sekojošiem nosacījumiem: ja visi Latvijas iedzīvotāji sanāks vienā punktā, tad punkts *(u, v)* būs tas punkts, līdz kuram visu iedzīvotāju kopējais noietais attālums būs vismazākais.

Vienkāršošanai tiek pieņemts, ka visi γ-tās pilsētas iedzīvotāji koncentrējās koordinātu centrā (z_γ, y_γ). Tas ir pieļaujams pieņēmums, jo pilsētu laukumi ir mazāki par rajonu laukumiem.

Tagad matemātiskā problēma ir formulēta sekojoši: *atrast punktu (u, v), kas minimizē mērķa funkciju*

$$g(u,v)=\sum_{\iota=1}^{w} h_\iota \int_{y_\iota - r_\iota}^{y_\iota + r_\iota} \int_{z_\iota-\sqrt{r_\iota^2-(\omega-y_\iota)^2}}^{z_\iota+\sqrt{r_\iota^2-(\omega-y_\iota)^2}} \sqrt{(q-u)^2+(\omega-v)^2}\,dz\,d\omega + \sum_{\gamma=1}^{m}\sqrt{(z_\gamma-u)^2+(y_\gamma-v)^2}\,\hat{H}_\gamma . \quad (2.8)$$

Ir iespējams atrast minimuma punktu *(u, v)*, izmantojot gradienta metodi. Funkcijas gradients (2.8) ir dots izteiksmē:

$$\nabla g(u,v)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} g(u,v) \\ \dfrac{\partial}{\partial v} g(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -\sum_{\iota=1}^{w} h_i \int_{y_\iota - r_\iota}^{y_\iota + r_\iota} \int_{z_\iota-\sqrt{r_\iota^2-(\omega-y_\iota)^2}}^{z_\iota+\sqrt{r_\iota^2-(\omega-y_\iota)^2}} \left[(q-u)^2+(\omega-v)^2\right]^{-\frac{1}{2}}(q-u)\,dq\,d\omega - \sum_{\gamma=1}^{m}\left[z_\gamma-u)^2+(y_\gamma-v)^2\right]^{-\frac{1}{2}}(z_\gamma-u)\hat{H}_j \\ -\sum_{\iota=1}^{w} h_i \int_{y_\iota - r_\iota}^{y_\iota + r_\iota} \int_{z_\iota-\sqrt{r_\iota^2-(\omega-y_\iota)^2}}^{z_\iota+\sqrt{r_\iota^2-(\omega-y_\iota)^2}} \left[(q-u)^2+(\omega-v)^2\right]^{-\frac{1}{2}}(\omega-v)\,dq\,d\omega - \sum_{\gamma=1}^{m}\left[(z_\gamma-u)^2+(y_\gamma-v)^2\right]^{-\frac{1}{2}}(y_\gamma-v)\hat{H}_j \end{pmatrix}.$$

Jāņem vērā, ka gradienta metodi jāizmanto uzmanīgi, jo mērķa funkcijai ir pārtrūkumi rajonu robežās. Līdz ar to gradienta metodes standarta algoritmā tika veiktas dažas izmaiņas. Tā kā mēs nevaram pilnīgi uzticēties gradienta metodei, tas tika pārbaudīts arī ar minimizēšanas funkcijas palīdzību. Eksperimenti rādīja metodes efektivitāti pie neliela soļa.

Tika izstrādāta speciāla programmatūra Mathcad 14 vidē. Programmu komplekss ļauj aprēķināt Latvijas iedzīvotāju blīvumu dotajai koordinātei *(z, y)* ar formulas (2.7) palīdzību. Kā piemērs 2.5. tabulā tika attēloti daži blīvumi attiecīgās koordinātēs *(z, y)*.

2.5. tabula

Iedzīvotāju blīvumi koordinātēs *(z,y)*

Koordinātes, *(z,y)*	190, 150	360, 80	320, 160	40, 100	100, 180
Blīvums, *f(z,y)*	52.216	33.16	12.82	29.04	16.99

Kā tas redzams mūsu piemērā - vismazākais blīvums ir koordinātēs (320, 160).

2.6. tabula

Mērķa funkcijas vērtība dažādās koordinātēs

Koordinātes, *(u, v)*	190, 150	360, 80	320, 160	40, 100	100, 180
Mērķa funkcija, *g(u, v)*	$1.856 * 10^8$	$3.946 * 10^8$	$3.184 * 10^8$	$4.284 * 10^8$	$3.228 * 10^8$

Minimālā mērķa funkcijas vērtība atrodas punktā (190, 150).

Šis programmu komplekss ļauj mums noteikt Latvijas vidēji svērtās koordinātes, izmantojot arī gradienta metodi. Aprēķini parādīja, ka Latvijas vidēji svērtās koordinātes ir (189.94, 149.80). Šīs koordinātes attiecās uz pilsētu Rīga.

SECINĀJUMI

Ir apskatīts analītiskās atkarības izstrādes uzdevums, kas ļauj norādītajām koordinātēm Latvijas teritorijā aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu. Izstrādātais problēmas risinājuma algoritms ir bāzēts uz gradienta metodi. Tika atrast vidēji svērtais Latvijas centrs. Apskatītie skaitliskie piemēri rādīja tā efektivitāti.

2.2. Apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas uzdevuma matemātiskais modelis

Formālais uzdevuma apraksts ir sekojošs. Tiek apskatīta reālā telpa *X*, kurā konkrēts *punkts* būs apzīmēts ar *x*, plaknei tas ir divdimensiju vektors (var apskatīt arī citu dimensiju). Ir noteikts attālums $l(x, x^*)$ starp punktiem x un x^*, kas apmierina parastos attāluma aksiomu nosacījumus: $l(x, x) = 0$, $l(x, x^*) \geq 0$, $l(x, x^*) \leq l(x, x') + l(x', x^*)$.

Šajā telpā ir izvietoti daži objekti (piemēram, dzīvo cilvēki, dzīvnieki, atrodas sporta bāzes). Objekts, kas atrodas punktā *x*, tiek nosaukts par ***x****–objektu*. Objekta izvietošanas blīvums ir aprakstīts ar zināmo blīvuma funkciju $f(x) \geq 0$, līdz ar to

$$\int_{x \in X} f(x)x = 1.$$

Telpā jābūt izvietotiem dažiem *apkalpošanas objektiem*, kuru skaits vienāds ar *k*. Ir nepieciešams noteikt šo punktu koordinātes, kuras tiek apzīmētas ar $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$. Ja *x*–objekts tiek apkalpots *i*-tajā apkalpošanas objektā, tad atbilstoši zaudējumi ir vienādi ar $g_x\left(x^{(i)}\right)$, piemēram, $g_x\left(x^{(i)}\right) = g(x - x^{(i)})$. Pieņemsim, ka $g_x(\circ)$ ir zaudējuma funkcija un paredzēsim, ka tā ir simetriska attiecībā pret nulli: ($g_x(x^{(i)}) = g_x(-x^{(i)})$) un ir izliekta (uz leju).

Varbūtība, ka *x*-objekta apkalpošana notiek *i*-tajā apkalpošanas objektā, ir sekojoša

$$\delta_i(x) = \frac{l\left(x, x^{(i)}\right)}{\sum_j l\left(x, x^{(j)}\right)}.$$

Tagad problēmu var formulēt sekojoši: atrast apkalpošanas objektu izvietošanas koordinātes $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$, kas minimizē kopējos zaudējumus

$$D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\right) = \int \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} l\left(\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1}} \sum_{i=1}^{k} \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1} g_x(x^{(i)}) f(x) dx. \qquad (2.9)$$

Mainīgie tiek apzīmēti kā vektors $x = x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$.

Turpmāk tiks izmantota attāluma funkcija un zaudējuma funkcija:

$$l(x,t) = \sqrt{\left(x_1 - t_1\right)^2 + \left(x_2 - t_2\right)^2}, \qquad (2.10)$$

$$g(x,t) = \left|x_1 - t_1\right| + \left|x_2 - t_2\right|. \qquad (2.11)$$

2.3. Optimizācijas metodes

2.3.1. Gradienta optimizācija

Pieņemsim, ka objekta koordinātes ir $x = \left(x_1 \quad x_2\right)^T \in R^2 = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$, *j*-tā objekta koordinātes ir

$x^{(j)} = \left(x_1^{(j)} \quad x_2^{(j)}\right)^T$. Kritērija minimizēšanai tiks izmantota gradienta metode (2.9). Šim mērķim tiks aprēķināts attiecīgais gradients. Parciālajam gradientam attiecībā uz *j*-to objektu tiks izmantota sekojoša izteiksme:

$$\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1^{(j)}} D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2^{(j)}} D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\right)\right)^T,$$

kur

$$\frac{\partial}{\partial x_q^{(j)}} D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_q^{(j)}} \int \frac{1}{\sum_i \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1}} \sum_{i=1}^{k} \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1} g_x(x^{(i)}) f(x) dx =$$

$$= \int \left(\sum_i \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1}\right)^{-1} \left(\left(g_x(x^{(j)})\left(-\left(l\left(x, x^{(j)}\right)\right)^{-2}\right) \frac{\partial}{\partial x_q^{(j)}} l\left(x, x^{(j)}\right) + \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_q^{(j)}} g_x(x^{(j)})\right)\right) f(x) dx - \tag{2.12}$$

$$- \int \left(\sum_i \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1}\right)^{-2} \left(\sum_i \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1} g_x(x^{(i)}) \left(-\left(l\left(x, x^{(j)}\right)\right)^{-2}\right) \frac{\partial}{\partial x_q^{(j)}} l\left(x, x^{(j)}\right)\right) f(x) dx$$

Tagad mēs varam pasniegt gradientu no (2.9) kā parciālo atvasinājumu $(2 \times k)$-matricu

$$\nabla D(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1^{(1)}} D(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}) & ... & \frac{\partial}{\partial x_1^{(k)}} D(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2^{(1)}} D(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}) & ... & \frac{\partial}{\partial x_2^{(k)}} D(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Tad mums ir sekojoši atvasinājumi:

$$\frac{\partial}{\partial t_q} l(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\left(x_1 - t_1\right)^2 + \left(x_2 - t_2\right)^2}} \left(x_i - t_i\right), \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_q} g(x, t) = \frac{\partial}{\partial t_q} g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 1 & ja \ x_i < t_i, \\ -1 & citādi. \end{cases} \tag{2.15}$$

Optimizācijai tiek izmantots divu etapu process. Pirmajā stadijā pa-koordinātu (component-wise (coordinate-wise)) optimizācija tiek izmantota sekojoši. *j*-tās iterācijas (*j* = 1, 2, …, *k*) funkcija (2.9) ir minimizēta attiecībā uz abām *j*-tā objekta koordinātēm $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)} \quad x_2^{(j)}\right)$, tajā pat laikā pārējās koordinātes nemainās. Otrajā etapā mēs strādājam ar pilno gradientu (2.13).

2.3.2. Kvazi-Ņjūtona metode. BFGS metode.

Kvazi-Ņūtona metodēm ir nepieciešams tikai mērķa funkcijas gradients $D(x) = D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right)$, kas tiek izmantots katrā iterācijā. Mērot izmaiņas gradientos, tās būvē mērķa funkcijas modeli, kas ir pietiekami labs, lai radītu superlineāras konverģences (superlinear convergence).

Vispopulārākais kvazi-Ņjūtona algoritms ir BFGS metode, kas nosaukta par godu tās atklājējiem Brojdenam, Flečeram, Godfarbam, Šanno (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno).

Meklējuma virziens p_k etapā k ir dots

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla D_k,$$

kur B_k ir $n \times n$ simetriska pozitīvi definēta matrica (positive definite matrix), kas tiks atjaunota katrā iterācijā.

Pieņemsim, ka sākotnējā x_0 vērtība ir fiksēta. ∇D_k ir funkcijas (2.9) parciālā atvasinājumu $(2 \times k)$-matrica.

Jaunā iterācija nosaka

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

kur soļa garums α_k izvēlēts, lai tiktu izpildīts Vulfa nosacījums.

Vulfa nosacījums ir populārs netiešs līnijas meklēšanas (inexact line search) nosacījums, kas paredz, ka α_k vispirms jādod nepieciešamo samazinājumu mērķa funkcijā D, kā tas noteikts sekojošā nevienādībā:

$$D(x_k + \alpha p_k) \leq D(x_k) + c\alpha_k \nabla D_k^T p_k$$

kādai konstantei $c \in (0, 1)$ (tipiskā c vērtība ir 0.9, kad meklēšanas virziens p_k ir izvēlēts pēc Ņjūtona vai kvazi-Ņjūtona metodes). Citiem vārdiem sakot, samazinājumam funkcijā D jābūt proporcionālam gan soļa garumam α_k, gan atvasinājumam pa virzienu (directional derivative) $\nabla D_k^{\ T} p_k$.

Lai realizētu BFGS metodi, soļa garums α_k tiek rēķināts no līnijas meklēšanas procedūras, kas apmierina Vulfa nosacījumus.

Algoritms 1 (atpakaļejoša līnijas meklēšana (Backtracking line search))

Izvēlēties $\bar{\alpha} > 0$, $\rho \in (0, 1)$, $c \in (0, 1)$; Uzstādīt $\alpha \leftarrow \bar{\alpha}$
atkārtot līdz $D(x_k + \alpha p_k) \le D(x_k) + c\alpha_k \nabla D_k^T p_k$
Uzstādīt $\alpha \leftarrow \rho\alpha$;
beigt (atkārtot)
Pārtraukt pie $\alpha_k = \alpha$

Šajā procedūrā sākotnējais soļa garums $\bar{\alpha}$ tiek izvēlēts kā 1 Ņūtona un kvazi- Ņūtona metodēs. Praksē kontrakcijas faktoram (contraction factor) ρ bieži vien ir pieļaujami mainīties pie katras līnijas meklēšanas iterācijas.

Mēs varam iegūt BFGS algoritma versiju, kas strādā ar Hesiana aproksimāciju (Hessian approximation) B_k.

Algoritms 2 (BFGS metode)

Ir dots sākotnējais punkts x_0, konverģences tolerance $\varepsilon > 0$,
Inversa Hesiana aproksimācija B_0;
$k \leftarrow 0$;
kamēr $\|\nabla D_k\| > \varepsilon$;
Aprēķināt ∇D_k un meklēšanas virzienu

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla D_k$$

Uzstādīt $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ kur α_k ir aprēķināts no līnijas meklēšanas procedūras, kas atbilst Vulfa nosacījumiem;
Noteikt $s_k = x_{k+1} - x_k$ un $\zeta_k = \nabla D_{k+1} - \nabla D_k$;

Aprēķināt $B_{k+1} = B_k - \dfrac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \dfrac{\zeta_k \zeta_k^T}{\zeta_k^T s_k}$; (2.16)

Uzstādīt $k \leftarrow k + 1$;
beigt (kamēr)

Algoritms ir drošs un tā konverģences ātrums ir superlineārs, kas ir pietiekami ātrs daudziem praktiskiem mērķiem.

Tabulas 2.7 un 2.8 satur optimizācijas rezultātus.

2.7. tabula

Gradientu optimizācijas rezultāti

	Iterācijas numurs				
	1	2	3	4	5
$x_1^{(1)}$	40	41.65	43.24	44.78	46.33
$x_2^{(1)}$	80	82.57	85.08	87.72	90.38
$x_1^{(2)}$	100	103.22	106.48	109.79	113.17
$x_2^{(2)}$	130	131.54	133.05	134.39	135.73
$x_1^{(3)}$	60	61.63	63.18	64.65	66.16
$x_2^{(3)}$	60	62.17	64.34	66.47	68.70
$x_1^{(4)}$	190	196.53	203.16	209.98	216.74
$x_2^{(4)}$	100	105.26	110.47	115.45	120.39
D	$2.24 * * 10^8$	$2.19 * * 10^8$	$2.11 * * 10^8$	$2.04 * * 10^8$	$1.98 * * 10^8$

2.8. tabula

BFGS metodes rezultāti

	Iterācijas numurs				
	1	2	3	4	5
$x_1^{(1)}$	40	40.16	32.24	70.98	68.61
$x_2^{(1)}$	80	80.25	96.67	77.74	93.93
$x_1^{(2)}$	100	100.32	131.69	157.11	165.91
$x_2^{(2)}$	130	130.15	184.13	103.24	114.68
$x_1^{(3)}$	60	60.16	57.16	92.99	93.76
$x_2^{(3)}$	60	60.21	78.57	71.16	83.64
$x_1^{(4)}$	190	190.65	225.14	291.56	289.96
$x_2^{(4)}$	100	100.52	196.24	35.93	60.91
α	1	1	1	0.5	0.5
D	$2.24 * 10^8$	$2.23 * 10^8$	$2.02 * 10^8$	$2.07 * 10^8$	$1.88 * 10^8$

Tabulās var redzēt, ka gradienta un BFGS metodes nepārtraukti uzlabo kritērija vērtību. Kā tas redzams, abām metodēm ir vienādas vērtības; līdz ar to mēs varam izmantot gradienta metodi kā vienkāršāko metodi.

SECINĀJUMI

Tika apskatīts apkalpošanas objektu izvietošanas telpā uzdevums. Uzlabotais uzdevuma risinājuma algoritms ir balstīts uz gradienta un kvazi-Ņjūtona metodēm. Iegūtie skaitliskie piemēri rāda to efektivitāti.

2.3.3. *Ģenētiskais algoritms*

Ģenētiskie algoritmi ir gadījuma meklēšanas metodes, kuras pamatojas uz Darvina evolūcijas teoriju.

Katru tekošo vektoru $\tilde{x} = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\right)$, kurš atbilst nosacījumam (2.24) sauc par *pieņemamu hromosomu*. Vienlaikus tiek apskatītas daudzas hromosomas, kuru kopu sauc par *paaudzi*. Paaudze ir kopa $P = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\}$ [6].

Ģenētiskā algoritma darbības gaitā paaudzes nomaina viena otru atbilstoši evolūcijas procesam. Jaunas paaudzes tiek veidotas ar divu operāciju palīdzību, kuras sauc par *ģenētiskajām* un *evolūcijas* operācijām. Ģenētiskās operācijas rada jaunas hromosomas. Ir divas ģenētiskās operācijas - *krustošanās (crossover)* un *mutācija (mutation)*. Evolūcijas operācija atspoguļo dabiskās izlases mehānismu, pielietojot to hromosomām jaunajā paaudzē. Parasti evolūcijas operāciju sauc par *selekciju (selection)*.

Krustošanās operācijā piedalās divas hromosomas $\tilde{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, ..., x_1^{(k)})$ un $\tilde{x}_2 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_2^{(k)})$.

Vispirms jāģenerē vesels gadījuma skaitlis *R*, kurš ir vienmērīgi sadalīts intervālā [1, 2, …, *k*]. Izvelētā punktā *R* hromosomas dalās divās daļās: $\tilde{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, ..., x^{(R)}, x^{(R+1)}, ..., x_1^{(k)})$, $\tilde{x}_2 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_2^{(R)}, x_2^{(R+1)}, ..., x_2^{(k)})$. Pēc tam sakombinējam vienas hromosomas kreiso pusi ar otras hromosomas labo pusi. Iegūsim divas jaunas hromosomas:

$$\tilde{\tilde{x}}_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, ..., x_1^{(R)}, x_1^{(R+1)}, ..., x_1^{(k)}),\ \tilde{\tilde{x}}_2 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_2^{(R)}, x_2^{(R+1)}, ..., x_2^{(k)}). \qquad (2.17)$$

Piemēram, ja *R*=5, *k*=11 un

$$\tilde{x}_1 = (10110011100),\quad \tilde{x}_2 = (01100110011),$$

tad

$$\tilde{x}_1 = (10110110011),\quad \tilde{x}_2 = (01100011100).$$

Mutācija ir ģenētiska operācija hromosomai $\tilde{x} = (x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(k)})$, kura maina vērtību *R*-tajā šķirā uz pretējo. Precīzi sākot, mutācijas maina $x^{(R)}$ vērtību 0 vai 1 *R*-tā komponentā uz pretējo vērtību $\bar{x}^{(R)}$:

$$\tilde{\tilde{x}} = (x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(R-1)}, \bar{x}^{(R)}, x^{(R+1)},..., x^{k}). \tag{2.18}$$

Tāpat kā agrāk *R* vērtība tiek izvēlēta nejaušā veidā, neatkarīgi no iepriekšējas izvēles *R*. Piemēram, ja *R* = 2 un $\tilde{x} = (10110110011)$ ir iepriekš iegūtas hromosomas, tad pēc mutācijas

$$\tilde{\tilde{x}} = (11110110011).$$

Selekcijas operācija veido jaunu paaudzi. Hromosoma $\tilde{x}_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)},..., x_j^{(k)})$ no vecās paaudzes tiek izvēlēta jaunajā paaudzē saskaņā ar tās mērķa funkcijas vērtību *D(x,)* (sk. formulu (2.9)). Ja nepieciešams maksimizēt mērķa funkciju, tad izvēles varbūtība p_j, hromosomai $\tilde{x}_j$ ir:

$$p_j = D(\tilde{x}_j) / \sum_{v=1}^{n} D(\tilde{x}_v). \tag{2.19}$$

Minimizācijas gadījumā:

$$p_j = \frac{1}{D(\tilde{x}_j)} \left(\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{D(\tilde{x}_v)} \right)^{-1}. \tag{2.20}$$

Lai izveidotu jaunu paaudzi, veiksim *n* neatkarīgus gadījuma mēģinājumus. Turklāt katrā mēģinājumā ģenerējam vienmērīgi sadalītu gadījuma lielumu *R* no intervāla (0, 1). Izvēlamies hromosomu ar numuru *j*, ja ir spēkā nevienādība:

$$F_{j-1} < R \le F_j, \quad j = 1,2,..., n, \tag{2.21}$$

kur $F_0 = 0,\ F_n = 1$ un

$$F_j = \sum_{v=1}^{j} p_v, \quad j = 1,\ 2,..., n-1.$$

Jāatzīmē, ka viena un tā pati hromosoma jaunajā paaudzē var būt izvēlēta vairākas reizes.

Pēc jaunās paaudzes noformēšanas veic krustošanās un mutācijas operācijas. Turklāt ir dotas krustošanās p_c un mutācijas p_m varbūtības. To vērtības nozīmē vidējo hromosomu daļu, kuras tiek iesaistītas atbilstošajā operācijā.

Krustošanās operācija sākas no hromosomu izvēles šai operācijai. Veiksim *n* neatkarīgus gadījuma mēģinājumus. Pašreizējā mēģinājumā ģenerējam vienmērīgi sadalītu gadījuma lielumu *R* no intervāla (0, 1). Ja ir spēkā nevienādība

$$R \le p_c, \tag{2.22}$$

tad hromosoma $\tilde{x}_j$ tiek izvēlēta krustošanās operācijai. Pieņemsim, ka *sk* ir izvelēto hromosomu skaits.

Pēc tam grupējam izvēlētās hromosomas pa pāriem un veicam krustošanās operāciju (2.17), mainot tekošajā paaudzē vecās hromosomas pret jaunajām hromosomām.

Pēc tam pāriesim pie mutācijas operācijas. Atkal veiksim *n* neatkarīgus mēģinājumus. Pašreizējā mēģinājumā ģenerējam vienmērīgi sadalītu gadījuma lielumu *R* intervālā (0, 1). Ja

$$R \le p_m, \tag{2.23}$$

tad hromosomai jāveic mutācijas operāciju (2.18). Pieņemsim, ka *sm* ir izvelēto hromosomu skaits.

Tagad varam aprakstīt ģenētisko algoritmu optimizācijai.

Ieeja:

1) mērķa funkcija (2.9);

2) ierobežojumu kopa *T* (2.24);

3) algoritma parametri: *n* – populācijas apjoms; *h* – apskatāmo populāciju skaits; p_c un p_m – krustošanās (pieņemsim p_c =0.95) un mutācijas (pieņemsim p_m=0.01) varbūtības.

Izeja: uzdevuma vislabākais risinājums, kurš tiek atrasts ar ģenētisko algoritmu.

Algoritms 3

1) Ģenerēt sākuma populāciju (*OP*) kā *k* x *n* matricu. Pieņemt *t=1.*
2) Turpināt, ja $t \le h$.
   a) *Selekcija.* Izmantojot veco populāciju *OP,* ar selekcijas operāciju izveidot jaunu populāciju *NP* kā *k* x *n* matricu.
   b) *Krustošanās.*
      i) Izveidot (saskaņā ar formulu (2.22)) vektoru $V=(V_1, V_2, \ldots, V_{sk})$, kas satur *sk* hromosomu numurus no jaunās populācijas *NP,* kuras piedalījās krustošanās operācijā.
      ii) Turpināt, ja $sk \ge 2$.
      Veikt krustošanās operāciju hromosomām $\tilde{x}_{sk}$ un $\tilde{x}_{sk-1}$ un izveidot jaunas hromosomas $\tilde{\tilde{x}}_{sk}$ un $\tilde{\tilde{x}}_{sk-1}$. Ja $\tilde{\tilde{x}}_{sk}$ atbilst nosacījumiem (2.24) un $D(\tilde{\tilde{x}}_{sk})$ vērtība ir labāka nekā $D(\tilde{x}_{sk})$, tad populācijā *NP* jāsamaina hromosoma $\tilde{x}_{sk}$ ar $\tilde{\tilde{x}}_{sk}$. Atkārtot šo procedūru ar $\tilde{\tilde{x}}_{sk-1}$ un $\tilde{x}_{sk-1}$. Pieņemt *sk=sk*-2.
   c) *Mutācija.*
      i) Izveidot (saskaņā ar formula (2.23)) vektoru $W=(W_1, W_2, \ldots, W_{sm})$, kas satur *sm* hromosomu numurus no *NP,* kuras piedalījās mutācijas operācijā.
      ii) Katrai hromosomai $\tilde{x}_j$, kur $j \in W$, veikt mutāciju un iegūt hromosomu $\tilde{\tilde{x}}_j$. Ja $\tilde{\tilde{x}}_j$ atbilst nosacījumiem (2.24) un $D(\tilde{\tilde{x}}_j)$ vērtība ir labāka nekā $D(\tilde{x}_j)$, populācijā *NP* jāsamaina hromosoma $\tilde{x}_j$ ar $\tilde{\tilde{x}}_j$.
      iii) Izvēlēties no pēdējās populācijas *OP=NP, t=t*+1 un pāriet uz 2.soli.
3) Izvēlēties no pēdējās populācijas *NP* hromosomu *NP* ar vislabāko mērķa funkcijas vērtību un pieņemt par uzdevuma risinājumu [6].

Mūsu gadījumā funkcija *D(x)* no (2.9) tiek izmantota kā mērķa funkcija. Problēma ir formulēta sekojoši: atrast objektu izvietošanas koordinātes $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, kas minimizē kopējos zaudējumus

$$D\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right) = \int \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} l\left(\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1}} \sum_{i=1}^{k} \left(l\left(x, x^{(i)}\right)\right)^{-1} g_x(x^{(i)}) f(x) dx$$

pie nosacījuma, ka

$$x^{(i)} \in T\,, \qquad (2.24)$$

kur T apzīmē apskatāmo teritoriju.

Tālāk mainīgie tiek apzīmēti kā vektors $\tilde{x} = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right)$.

Mūsu gadījumā apskatāmais vektors ir vektors, kas satur visas koordinātas (koordinātu kopu). Katra koordināte satur 2 skaitļus. Hromosoma $\tilde{x} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, kur $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, ir pirmā apkalpošanas objekta koordinātes, $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ ir otrā apkalpošanas objekta koordinātes, $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ ir k-tā apkalpošanas objekta koordinātes.

Matrica A (sk. 2.2. att.) apraksta Latvijas teritoriju T. Katram matricas elementam atbilst Latvijas teritorijas taisnstūris, kas tiek uztverts kā punkts (koordinātu pāris $(x_{1,i}, x_{2,j})$).

$$A = \begin{array}{rl} & x_2^{(k)} \\ x_1^{(k)} & \begin{pmatrix}
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \\
0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \\
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \\
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0
\end{pmatrix} \end{array}$$

2.2. att. Matrica *A*

Matrica *A* satur šādu informāciju:

$$A = \begin{cases} 1, \textit{ ja koordinātes } (x_{1,i}^{(k)}, x_{2,j}^{(k)}) \textit{ pieder Latvijas teritorijai,} \\ 0, \textit{ citādi.} \end{cases}$$

Tāpēc pieņemams nosacījums (2.24) punktam $x^{(v)} = (x_1^{(v)}, x_2^{(v)}) = (x_{1,i}, x_{2,j})$

ir izpildīts, ja $A_{i,j} = 1$.

MATLAB R2009b vidē tika izstrādātas speciālas programmas. Programmu komplekss ļauj optimizēt mērķa funkciju (2.9) izmantojot ģenētisko algoritmu (Algoritms 3).

Tika veikti desmit eksperimenti ar dažādiem datiem tika veikti.

2.9. tabula

Vispārējie eksperimentu rezultāti

	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_1^{(4)}$	$x_2^{(4)}$	D
Eksperiments Nr.1	356.07	88.23	223.32	240.16	121.71	149.57	120.21	169.95	$1.355*10^8$
Eksperiments Nr.2	281.82	193.94	316.75	144.44	98.64	168.61	108.42	140.61	$1.42*10^8$
Eksperiments Nr.3	259.28	82.88	338.03	101.86	235.19	151.56	100.08	82.55	$1.581*10^8$
Eksperiments Nr.4	308.51	69.19	262.68	254.46	167.39	121.61	60.328	135.21	$1.485*10^8$
Eksperiments Nr.5	312.77	200.88	134.49	182.98	191.22	157.82	301.90	75.87	$2.018*10^8$
Eksperiments Nr.6	292.74	239.88	287.96	89.80	76.70	96.68	68.05	103.77	$1.702*10^8$
Eksperiments Nr.7	252.45	204.64	258.57	116.63	117.52	147.01	166.07	123.40	$1.438*10^8$
Eksperiments Nr.8	284.12	227.05	190.30	153.10	161.50	134.91	163.03	91.54	$1.486*10^8$
Eksperiments Nr.9	344.01	205.073	266.68	74.60	94.96	135.02	175.912	143.33	$1.324*10^8$
Eksperiments Nr.10	232.52	98.51	283.07	180.0	102.57	113.39	215.02	138.34	$1.468*10^8$

2.9. tabulā punkti ir optimāla lēmuma koordinātes un D ir mērķa funkcijas vērtība. No tabulas mēs redzam, kā ģenētiskais algoritms uzlabo kritērija vērtību.

Ģenētiskais algoritms sniedz labākus rezultātus nekā gradienta metode. Iemesls ir sekojošs: gradienta metode beidz strādāt lokālajā minimumā. Bet mūsu uzdevums ir daudzekstrēms. Tas, ka uzdevums ir daudzekstrēms, ģenētisko algoritmu ietekmē mazāk. Vislabākie rezultāti sasniedzami, apvienojot abas metodes. 2.10. tabulā mēs redzam gradienta metodes rezultātus, kas sākas no punktiem, kurus izskaitļoja ģenētiskais algoritms.

2.10. tabula

Ģenētiska algoritma un gradienta metodes kombinācija

Optimizācijas metode	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_1^{(4)}$	$x_2^{(4)}$	D
Ģenētiskais algoritms	232.52	98.51	283.07	180.0	102.57	113.39	215.02	138.34	$1.468*10^8$
Gradienta metode	244.30	116.62	292.96	174.69	103.82	128.33	224.91	142.14	$1.39*10^8$

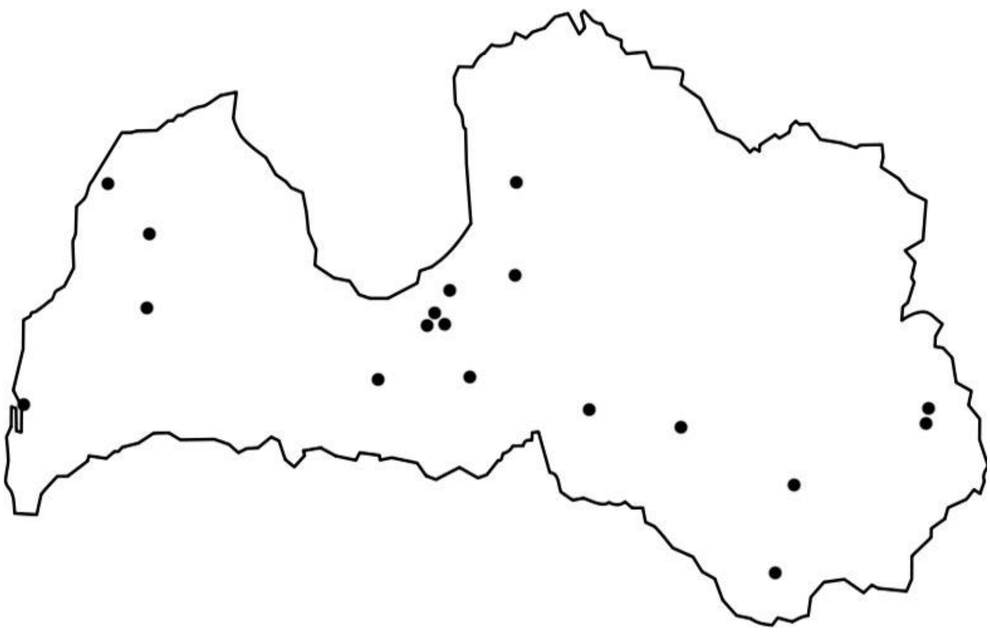
No tabulas var redzēt kā uzlabojās mērķa funkcijas vērtība. Nākamajā gradienta optimizācijā funkcijas vērtība nemainījās. Visi saņemtie punkti atrodas Latvijas teritorijā.

SECINĀJUMI

Tika apskatīts apkalpošanas objektu izvietošanas telpā uzdevums. Izstrādātais uzdevuma risinājuma algoritms ir balstīts uz gradienta metodes un ģenētiska algoritma kombinācijas. Iegūtie skaitliskie piemēri rāda to efektivitāti.

2.4. Apskatīto metožu pielietojums.

Latvijā ir vieglatlētikas manēžu trūkums (sk. 2.3. att.) un šodien tā ir viena no aktuālākajām sporta bažu trūkuma problēmām.



2.3. att. Eksistējošo vieglatlētikas manēžu izvietojums

Eksistējošo vieglatlētikas manēžu saraksts un koordinātes dotas 2.11. tabulā. Dati ir ņemti no Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrijas Sporta departamenta datu bāzes “Sporta bāzu reģistrs” (http://sportabazes.izm.gov.lv/sbdb/), kura bija izveidota, sadarbojoties ar promocijas darba autoru.

2.11. tabula

Eksistējošo vieglatlētikas manēžu saraksts un koordinātes

Sporta bāzes nosaukums	Atrašanas vieta	Koordināta z	Koordināta y
Baldones sporta komplekss	Baldones novads	211	115,823
Biedrības “Latvijas Olimpiskā komiteja” olimpiskais sporta centrs	Rīga, Ziemeļu rajons	194,71	140,968
Daugavpils SP Bērnu jaunatnes sporta skola	Daugavpils	346,951	23,536
Jēkabpils 3.vidusskola	Jēkabpils novads	303,432	91,219
Jelgavas sporta halle	Jelgava	170,102	104,807
„Kuldīgas sporta aģentūras” vieglatlētikas manēža	Kuldīgas novads	63,441	142,434
Latvijas sporta pedagoģijas akadēmija	Rīga, Vidzemes priekšpilsēta	199,735	142,838
Liepājas sporta manēža	Liepāja	3,54	97,194
Ludzas novada Sporta skola	Ludzas novads	416,199	99,553
Murjāņu sporta ģimnāzija	Sējas novads	228,147	160,663
Preiļu 2.vidusskola	Preiļu novads	355,835	68,565
Rīgas pašvaldības sporta iestāde "Rīgas Nacionālā sporta manēža"	Rīga, Latgales priekšpilsēta	196,239	137,278
SIA "Olimpiskais centrs "Limbaži" "sporta komplekss	Limbažu novads	229,747	201,126
SIA "Olimpiskais centrs "Ventspils"" sporta komplekss	Ventspils	41,152	190,074
Sporta biedrība "Vārpa"	Aizkraukles novads	263,39	100,547
Sporta komplekss "Vārpa"	Ludzas novads	416,449	99,02
Ugāles vidusskola	Ventspils novads	67,471	177,187
VSIA "Kultūras un sporta centrs "Daugavas stadions""	Rīga, Latgales priekšpilsēta	196,74	139,302

Saskaņā ar šo informāciju mēs definējam mūsu problēmu sekojoši. Mums ir pieprasījums no Sporta departamenta izvietot 4 jaunas vieglatlētikas manēžas Latvijas teritorijā. Galīgais atrisinājums ir atkarīgs no iedzīvotāju izvietojuma Latvijas teritorijā. Attiecīgie dati un analītiskā izteiksme dota 2.1. nodaļā.

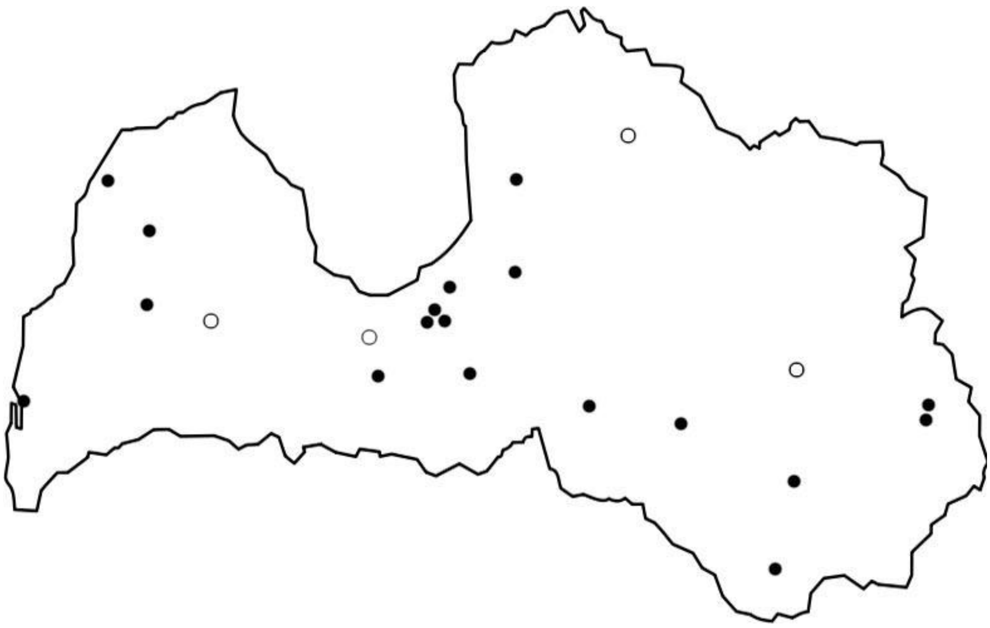
Optimizācijai tiek izmantots ģenētiskais algoritms (Algoritms 3). Eksperimentu rezultāti tiek attēloti apakšā. Tika veikti desmit eksperimenti, iegūtie rezultāti attēloti 2.12. tabulā. Pāris $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ nosaka k-tā objekta atrašanās vietas koordinātes. D ir mērķa funkcijas vērtība.

2.12. tabula

Vispārējie eksperimentu rezultāti

	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_1^{(4)}$	$x_2^{(4)}$	D
Eksperiments Nr.1	299.64	223.65	336.06	99.49	204.53	147.73	112.34	121.50	$1.365*10^8$
Eksperiments Nr.2	326.42	62.61	259.02	198.14	117.28	123.25	175.80	136.60	$1.351*10^8$
Eksperiments Nr.3	254.50	224.45	361.68	64.48	136.34	154.27	112.18	128.87	$1.341*10^8$
Eksperiments Nr.4	345.01	121.24	253.81	225.09	95.07	144.89	164.73	140.55	$1.333*10^8$
Eksperiments Nr.5	344.90	64.92	244.91	225.32	104.12	134.88	135.13	164.83	$1.334*10^8$
Eksperiments Nr.6	354.12	114.43	275.27	225.09	94.79	139.85	170.20	135.64	$1.3272*10^8$
Eksperiments Nr.7	262.18	224.88	337.47	92.13	177.30	134.99	95.18	136.21	$1.329*10^8$
Eksperiments Nr.8	256.99	87.04	345.26	212.43	156.96	144.75	95.98	142.67	$1.332*10^8$
Eksperiments Nr.9	361.14	65.17	275.37	222.70	105.03	135.03	168.53	134.89	$1.332*10^8$
Eksperiments Nr.10	343.62	114.31	274.40	225.99	95.40	135.23	176.63	134.97	$1.3274*10^8$

No tabulas mēs redzam, kā ģenētiskais algoritms uzlabo kritērija vērtību. Labākos rezultātus paradīja eksperiments Nr.6 (sk. 2.4. att.). Šeit jaunas vieglatlētikas manēžas apzīmētas ar baltiem punktiem.



2.4. att. Jauno vieglatlētikas manēžu izvietojums

Tika apskatīta vieglatlētikas manēžu aktuālā telpiskās izvietošanas problēma. Izstrādātais uzdevuma risinājuma algoritms ir balstīts uz ģenētiskā algoritma pamata. MATLAB R2009b vidē tika izstrādātas speciālas programmas. Iegūtie skaitliskie piemēri attēlo to efektivitāti. Mūsu pieredze rāda, ka programma strādā efektīvi un pasūtītājs ir novērtējis iegūtos rezultātus.

3. SECINĀJUMI

I. ZINĀTNISKĀ NOVITĀTE UN GALVENIE PĒTĪJUMU REZULTĀTI

1. Promocijas darbs veltīts matemātisko modeļu, metodes, algoritmu un datorprogrammu izstrādei, kas ļauj atrisināt optimālās apkalpošanas objektu izvietošanas uzdevumu esošās transporta infrastruktūras gadījumā, kā arī izpētīt to efektivitāti un pielietot iegūtos rezultātus praksē. Tā kā mūsdienu optimālā apkalpošanas objektu izvietošana ir praktiski svarīgs uzdevums, piedāvātais darbs ir aktuāls.
2. Promocijas darbā ir izpildīti visi sākumā fiksētie uzdevumi.
3. Tika veikta statistisko datu analīze iedzīvotāju sadalījumam Latvijas teritorijā. Rezultātā tika iegūta iedzīvotāju blīvuma analītiskā izteiksme. Tas ļauj noteiktām Latvijas koordinātēm aprēķināt atbilstošu iedzīvotāju blīvumu. Pamatojoties uz to, ir risināts sekojošs uzdevums: tika atrasts vidēji svērtais Latvijas centrs, t.i., tādas koordinātes, līdz kurām ir minimāls summārais attālums no visiem Latvijas punktiem (ņemot vērā iedzīvotāju blīvumu). Nepieciešamā statistiskā informācija tika iegūta no LR Centrālās statistikas pārvaldes.
4. Tika izstrādāts optimāls apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas oriģinālais matemātiskais modelis. Tika izmantotas mūsdienīgas optimizācijas metodes un algoritmi, tādi kā – līnijas meklēšanas metode (line search methods (step length, the Wolfe conditions, backtracking line search)), gradienta optimizācija, kvazi-Ņūtona metodes (quasi-Newton methods (BFGS metode)) un ģenētiskais algoritms. Augstākminēto uzdevumu atrisināšanai tika izstrādātas specializētas datorprogrammas Mathcad un MATLAB vidē.
5. Izstrādātais modelis un programmnodrošinājums ir derīgs jebkuram „transporta izdevumu” traktējumam. Svarīgi ir tikai tas, ka šie izdevumi atkarīgi (iespējams nelineāri) no dislokācijas attāluma starp klientu un objektu. Kā attālumi var figurēt (atkarībā no risināmā uzdevuma nosacījumiem):
   - Ģeogrāfiskie attālumi
   - Attālumi kilometros pa esošo ceļu tīkliem
   - Laiks, kas patērēts nepieciešamā attāluma veikšanai
   - Brauciena izmaksas
6. Tika veikts izstrādāto metožu un programmu eksperimentālais pētījums. Parādīta ģenētiskā algoritma priekšrocība salīdzinot ar algoritmiem, kuri pamatoti uz gradienta metodēm daudzekstrēmu uzdevumu risināšanai. Noteikts, ka vislabākos rezultātus dos ģenētiskā algoritma un gradienta metodes kombinācija. Tika secināts, ka vislabākos rezultātus var iegūt, ja sākotnējos punktus optimizācijai izvēlās eksperti.

II. APROBĀCIJA

1. Izstrādātie iedzīvotāju blīvuma sadalījuma Latvijas teritorijā apraksta modeļi un metodes tika izmantotas zinātniskajā projektā „Matemātisko modeļu, algoritmu un datorprogrammu izstrādāšana Latvijas transporta sistēmas analīzei, attīstības prognozēšanai un optimizācijai”, kas bija zinātniskā projekta “Zinātniskās darbības attīstība augstskolās” daļa un realizējās no 2008. gada 1. jūnija līdz 31. decembrim.
2. Uz iegūto rezultātu bāzes tika sagatavota daļa priekšmeta „Inženieruzdevumu risināšanas datormetodes” lekciju un praktisko darbu Rīgas Tehniskās universitātes Transportmašīnu Tehnoloģiju Institūta maģistratūras pirmā kursa studentiem.
3. Jaunu vieglatlētikas manēžu optimālā izvietojuma Latvijas teritorijā uzdevums risināts sadarbībā ar Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrijas Sporta departamentu. Statistiskas dati iegūti no LR Centrālās statistikas pārvaldes (LR CSP) un Latvijas Republikas Izglītības un zinātnes ministrijas Sporta departamenta datu bāzes “Sporta bāzu reģistrs”, kura bija radīta, sadarbojoties ar promocijas darba autoru.
4. Iegūtie modeļi un algoritmi var tikt izmantoti privātiem un valsts uzņēmumiem optimālo apkalpojošo objektu telpiskās izvietošanas uzdevumam, t.i., automašīnu tehniskās apkopes stacijas, sporta bāzes, degvielas uzpildes stacijas u.c.
5. Par promocijas darba galvenajiem rezultātiem ziņots 9 starptautiskajās zinātniskajās konferencēs un promocijas darba autors ir 8 zinātniski pētniecisko publikāciju autors un līdzautors.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Administratīvo teritoriju un apdzīvoto vietu likums (in Latvian). / Internet. http://www.likumi.lv/doc.php?id=185993
2. An introductory course in MATLAB Internet. / www.est.uc3m.es/afrodrig/Matlab/Tutorial_completo.pdf
3. Andronov A. On Some Approach to an Estimation of Correspondence Matrix of Transport Network // Proceedings of the International Conference "Mathematical Methods for Analysis and Optimisation of Information Telecommunication Networks". – Minsk: Belarusian State University, 2009. – pp. 261-267.
4. Andronov A., Santalova D. On Nonlinear Regression Model for Correspondence Matrix of Transport Network // ASMDA-2009 Selected papers. L.Sakalauskas, C.Skiadas and E.K.Zavadskas (Eds.). – Vilnius, 2009. – pp. 90-94.
5. Andronov A., Kashurin A. On a problem of spatial arrangement of service stations // Computer Modeling and New Technologies - Riga: TSI, 2007. - Vol.11, No.1, - pp. 31-37.
6. Andronovs A. Sarežģītu sistēmu vadības loģiskie pamati: Mācību līdzeklis. – RTU Izdevniecība, Rīga, 2006. – p. 70.
7. Brimberg J., Hansen P., Mladenovic N., Taillard E.D. Improvements and comparison of heuristics for solving the uncapacitated multi source Weber problem. Oper Res, 2000. - pp. 444–460.
8. Brimberg J., Mladenovic N. Solving the continuous Location-Allocation problem with tabu search. Stud Locational Ann, 1996. - pp. 23–32.
9. Busetti F. Simulated annealing overview. Internet. / http://www.cs.ubbcluj.ro/~csatol/mestint/pdfs/Busetti_AnnealingIntro.pdf
10. Cao Y.J., Wu Q.H. Teaching genetic algorithm using Matlab // Int. J. Elect. Enging. Educ. - Manchester: Manchester U.P., 1999. - Vol. 36, pp. 139–153.
11. Central Statistical Bureau of Latvia / Internet. - http://www.csb.gov.lv
12. Chapman S.J. MATLAB Programming for Engineers. 2 edition - CL-Engineering, 2001. - p. 496.
13. Chipperfield A., Fleming P., Pohlheim H., Fonseca C. Genetic Algorithm TOOLBOX For Use with MATLAB. - Department of automatic contral and systems engineering University of Sheffield, 2002. - p. 94.
14. COMMIN - the Baltic spatial conceptshare. National Planning Systems: Latvia / Internet. - http://www.nationsencyclopedia.com/Europe/Latvia-POPULATION.html

15. Cooper L. Location-Allocation problems. Oper Res, 1963. - pp. 331–343.
16. Davidon W.C., Variable metric method for minimization, Technical ReportANL–5990 (revised). Argonne, IL: Argonne National Laboratory, 1959.
17. Drezner Z, Wesolowsky G. On the collection depots location problem. Eur J Oper Res, 2001. - pp. 510–518.
18. Drezner Z., Hamacher H.W. Facility location: Applications and theory. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. - p. 457.
19. Eko U. Kā uzrakstīt diplomdarbu. Rīga: Jāņa Rozes apgāds, 2006. - p. 319.
20. Ernst A.T., Krishnamoorthy M. Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. Ann Oper Res, 1999. - pp. 141–159.
21. Ezilon maps. / Internet. http://www.ezilon.com/maps/europe/latvia-maps.html
22. Fellows M., H. Fernau. Facility Location Problems: A Parameterized View // AAIM '08 Proceedings of the 4th international conference on Algorithmic Aspects in Information and Management - Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2008. - pp. 188 – 199.
23. Floudas C.A., Pardalos P.M. Encyclopedia of Optimization. Second Edition. - Springer, 2009. - p. 4626.
24. Fouard C., Malandain G. 3-D chamfer distances and norms in anisotropic grids. Image Vision Comput, 2005. - pp. 143–158.
25. Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox For Use with MATLAB User’s Guide Version 1. - The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2005. - p. 222.
26. Gill P., Murray W., Wright M. Practical Optimization. – London: Academic Press, 1981. – p. 402.
27. Gong D., Gen M., Yamazaki G., Xu W. Hybrid evolutionary method for capacitated locationallocation problem. Comput Ind Eng, 1997. - pp. 577–580.
28. Hansen P., Jaumard B., Taillard E. Heuristic solution of the multi source Weber problem as a p-median problem. Oper Res Lett, 1998. - pp. 55–62.
29. Heragu S.S. Facilities design. PWS publishing company, a division of International Thomson Publishing Inc. Boston, 1997.
30. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence. - The MIT Press., 1992. - p. 228.

31. Kashurin A. A problem of arrangement of service stations on the given territory // Scientific journal of RTU. Mašīnzinātne un transports, 6th series - Riga: RTU, 2010. - vol.34, pp. 111-116.
32. Kashurin A. Statistical description of a distribution of population density over the Latvian territory // Scientific proceedings of Riga Technical University, Computer science, 5th series - Riga: RTU, 2008. - Vol.36, pp. 108-115.
33. Kashurin A., Parkova I. Genetic algorithm of optimal spatial arrangement of service stations// Scientific proceedings of Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA2011), The 14th Conference of the ASMDA International Society - Rome, Italy: 2011. – pp. 667
34. Kashurin A. Problem of optimal spatial arrangement of service stations // Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design - France, Clermont-Ferrand: Polytech Clermont-Ferrand, 2010. - pp. 249-254.
35. Kashurin A. Application of the problem of optimal location of service stations // Scientific journal of RTU. Mašīnzinātne un transports, 6th series - Riga: RTU, 2011. - vol.34, - Pieņemts publicēšanai.
36. Latvian environment agency. Sustainable Development Indicators in Latvia 2003. - Riga: Jelgavas tipogrāfija, 2003. – p. 164.
37. Maxfield B. Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math. United States of America: Academic Press; 2 edition, 2009. - p. 490.
38. Melo T., Nickel S., Saldanha da Gama F. Facility Location and Supply Chain. Management – A comprehensive review. - Berichte des Fraunhofer ITWM, Berichte des Fraunhofer ITWM, Nr. 130, Germany, 2007, - p. 63.
39. Ministry of Regional Development and Local Government and State Regional Development Agency, Latvia. National report of Latvia on implementation of cemat guiding principles for sustainable spatial development of the European continent / Internet. - http://www.coe.int/t/dg4/cultureheritage/heritage/cemat/confminist1-15/15eCEMAT_National_Report_Latvia_2010_EN.pdf
40. Mitchell M. An Introduction to Genetic Algorithms. Cambridge, Massachusetts, London, England: Massachusetts Institute of Technology, 1999. - p. 162.
41. Municipalities of Latvia. / Internet. http://www.statoids.com/ulv.html
42. Murray A.T, Church RL (1996) Applying simulated annealing to location-planning models. J Heuristics pp. - 31–53
43. Nacionālā sporta attīstības programma 2006. – 2012.gadam. / Internet. http://izm.izm.gov.lv/upload_file/Sports/nacionala-sporta-attistibas-programma.doc

44. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. - Springer-Verlag New York, Inc., 1999. - p. 634.
45. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. Second Edition. - Springer Science+Business Media, LLC., 2006. - p. 664.
46. Ogryczak W. Inequality measures and equitable approaches to location problems. Eur J Oper Res, 2000. - pp. 347–391.
47. Ohlemuller M. Tabu search for large location-allocation problems. J Oper Res Soc, 1997. - pp. 745–750.
48. Parametric Technology Corporation. Mathcad 14.0. Internet. / http://www.ptc.com/products/mathcad/.
49. Parkova I., Kašurins A., Vališevskis A., Viļumsone A. Making Decisions on Arrangement of Electronics in Smart Garment // Proceedings of the 8th International Scientific and Practical Conference “Environment. Technology. Resources.” - Rezekne: 2011. – pp. 202-211.
50. Parkova I., Vališevskis A., Kašurins A., Viļumsone A. Integration of Flexible Keypad into Clothing // Proceedings of the 8th International Scientific and Practical Conference “Environment. Technology. Resources.” - Rezekne: 2011. – pp. 173-181.
51. Pārna K., Viiart A. Algorithm for Finding Optimal Circles to Cover n Points on Plane // Tartu Conference on Computational Statistics & Statistical Education. Abstracts – Tartu, Estonia: IASE, 1996. - p. 43.
52. Plastria F., Nickel S., Puerto J. Location Theory: A Unified Approach // Springer, 2005. - pp. 523-525.
53. R2010b MathWorks Documentation / Internet. http://www.mathworks.com/help/index.html
54. R2010b MathWorks Documentation / Internet. http://www.mathworks.com/help/index.html
55. Register A.H. A Guide to MATLAB Object-Oriented Programming - Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, 2007. - p. 382.
56. ReVelle C.S., Eiselt H.A. Location analysis: A synthesis and survey // European Journal of Operational Research, 2005. - p. 1–19.
57. Santalova D. Semi-parametric regression models for analysis and forecasting of freight and passenger transportation volumes. Doctoral thesis. – Riga: Riga Technical University, 2009. – p. 162.
58. Santalova D. Vairumtirdzniecības noliktavas pārdošanu lieluma regresijas modelis // RTU zinātniskie raksti: Mašīnzinātne un Transports. – Rīga: RTU, 2005. – pp. 67-73.
59. Shopova E.G., Vaklieva-Bancheva N.G. BASIC—A genetic algorithm for engineering problems solution // Computers and Chemical Engineering (2006) - Sofia, Bulgaria: Institute of Chemical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences, 2005. – p. 17.

60. Sivanandam S.N., Deepa S.N. Introduction to Genetic Algorithms. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. - p. 453.
61. Spatial Statistics / Internet. - www.math.wright.edu/people/Thad_Tarpey/spatial.pdf
62. Sporta bāzu reģistrs. / Internet. http://sportabazes.izm.gov.lv/sbdb/
63. Sporta likums. / Internet. http://izm.izm.gov.lv/upload_file/Sports/Sporta-likums.pdf
64. Sporta politikas pmatnostādnes 2004.-2009.gadam. / Internet. http://izm.izm.gov.lv/upload_file/Sports/sporta-politikas-pamatnostadnes.doc
65. Sports Administration Report “Sports Facilities in Latvia”, Riga, 2007. - p. 28.
66. Srivastava M.S. Methods of Multivariate Statistics. Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. - p. 728.
67. Sumathi S., Hamsapriya T., Surekha P. Evolutionary Intelligence - An Introduction to Theory and Applications with Matlab. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. - p. 599.
68. The MathWorks – Matlab - Genetic Algorithm / Internet. - http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/gads/ga.html
69. Turkington D.A. Matrix Calculation and Zero-One Matrices: Statistical and Econometric Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. - p. 250.
70. Uster H, Love R.F. Formulation of confidence intervals for estimated actual distances. Eur J Oper Res, 2003. - pp. 586–601.
71. Variable metric method for minimization, SIAM Journal on Optimization, 1991, pp. 1–17.
72. White J.A, Francis R.L. Facility layout and location: An analytical approach. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
73. Wilson H.B., Turcotte L.H., Halpern D. Advanced mathematics and mechanics applications using MATLAB. 3rd ed. - Chapman & Hall/CRC, 2003. - p. 665.
74. Working with Functions in Files: Functions and Scripts (MATLAB®). / Internet. www.mathworks.com/help/techdoc/matlab_prog/f7-41453.html
75. Yang X. Mathematical Optimization – From Linear Programming to Metaheuristics. – University of Cambridge, United Kingdom: Cambridge International Science Publishing, 2008. – p. 161.
76. Ying Y., Pontil M. Online Gradient Descent Learning Algorithms // Foundations of Computational Mathematics - New York: Springer-Verlag, 2008. - Volume 8, Issue 5, p. 561-596.

77. Zanjirani F., Hekmatfar M. (Eds.). Facility Location Concepts, Models, Algorithms and Case Studies. -A Physica Verlag Heidelberg product - Singapore, 2009. – p. 549.
78. Žukovska J. Pasažieru aviopārvadājumu plūsmu prognozēšana. Promocijas darbs. – Rīga: Rīgas Tehniskā universitāte, 2008. – p. 177.
79. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. – СПб, Питер, 2004. – 461 p. 28.
80. Ануфриев И. MATLAB 7 в подлиннике. Наиболее полное руководство. - Санкт Петербург: БХБ Санкт Петербург, 2005. – p. 1097.
81. Дьяконов В.П. Mathcad 11/12/13 в математике. - Горяч.Линия-Телеком, Москва, 2007. – p. 958.