

**RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE**

**Rolands ŠĀVELIS**

**Signālu diskretizācijas un atjaunošanas  
paņēmienu izpēte**

**PROMOCIJAS DARBS**

Izstrādāts Elektronikas un datorzinātņu institūtā

**2013**

**RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE**  
Elektronikas un telekomunikāciju fakultāte  
Radioelektronikas institūts

**Rolands ŠĀVELIS**  
Doktora studiju programmas “Radioelektronika” doktorants

# **Signālu diskretizācijas un atjaunošanas paņēmienu izpēte**

**Promocijas darbs**

Izstrādāts Elektronikas un datorzinātņu institūtā

Zinātniskais vadītājs  
Dr. sc. comp., vad. pētnieks  
**M.GREITĀNS**

**Rīga 2013**

## Anotācija

Darbā ir pētīti dažādi signālu diskretizācijas un atjaunošanas paņēmieni ar mērķi izstrādāt teorētisku pamatojumu pieņemumam, ka signālus ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu precīzi var reprezentēt ar nolasēm, kuru izvietojumu laikā nosaka signāla aktivitāte – jo straujāk mainās signāls (jo lielāka lokālā frekvence), jo biežāk tiek ņemtas nolases, un otrādi – jo lēnāk mainās signāls (jo mazāka lokālā frekvence), jo lielāki ir laika intervāli starp secīgām nolasēm.

Mērķa sasniegšanai tika izvirzīti uzdevumi:

- ◆ izpētīt literatūrā sastopamās signālu diskretizācijas metodes;
- ◆ izstrādāt un pārbaudīt teoriju un metodes signālu signālatkarīgai diskretizācijai un atjaunošanai.

Saistībā ar izvirzītajiem uzdevumiem autors:

- ✓ ieguvis paplašināto Furjē rindu periodisku signālu izvērsei trigonometrisku funkciju rindā ar laikā mainīgām frekvencēm;
- ✓ formulējis paplašināto nolašu teorēmu signālu diskretizācijai saskaņā ar brīvi izvēlētu monotoni augošu funkciju;
- ✓ izstrādājis signāla maksimālās momentānās frekvences noteikšanas metodes ar mērķi tās pielietot signālu signālatkarīgai diskretizācijai saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu;
- ✓ formulējis pietiekamo nosacījumu signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli;
- ✓ izstrādājis formulētajam nosacījumam atbilstošās signālu atjaunošanas metodes;
- ✓ veicis izstrādāto metožu simulācijas MATLAB vidē un sniedzis iegūto rezultātu novērtējumu un secinājumus;
- ✓ izstrādājis signālatkarīga analogs-ciparu pārveidotāja iespiedplati, kas darbojas pēc līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas principa.

Darbs ir izstrādāts Elektronikas un datorzinātņu institūtā Valsts pētījumu programmas “Informācijas tehnoloģiju zinātniskā bāze” projekta Nr.3 “Oriģinālu signālu apstrādes paņēmieni izveide un izpēte konkurētspējīgu IT tehnoloģiju radīšanai” un ESF projekta Nr.2009/0219/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/020 “Viedo sensoru un tīklotu iegulto sistēmu pētījumu un attīstības centrs (VieSenTIS)” ietvaros.

Darbā: 132 lpp. teksts, 61 attēls, 2 tabulas, 8 pielikumi un 108 nosaukumu informācijas avoti.

## Annotation

In this thesis different signal sampling and reconstruction methods are studied with the aim of developing a theoretical justification for the assumption that the signals with time-varying spectral content can be accurately represented by samples obtained in signal-dependent way with more samples taken at high frequency regions and less samples – at low frequency regions.

Several objectives were set to fulfill the aim of the research:

- ◆ investigate different sampling methods found in literature;
- ◆ develop theory and methods for signal-dependent sampling and reconstruction.

The main results of this research are as follows:

- ✓ an extended Fourier series for analysis of signals with time-varying spectral content is proposed;
- ✓ an extended sampling theorem for signal-dependent sampling according to the maximum instantaneous frequency of the signal is proposed;
- ✓ different methods for estimation of the maximum instantaneous frequency of the signal are developed;
- ✓ a sufficient condition for perfect reconstruction of the signals from irregular samples is obtained, which allows the distances between consecutive samples to exceed the Nyquist step;
- ✓ several signal reconstruction methods from irregular samples are developed and verified by numerical simulations on different signals.

The doctoral thesis is the result of the research carried out at the Institute of Electronics and Computer Science within the framework of the State research program “Scientific basis of information technologies” project No.3 “Research and development of original signal processing approaches for creation of competitive IT technologies” and ESF co-financed project No.2009/0219/1DP/1.1.1.2.0/APIA/VIAA/020 “R&D Center for Smart Sensors and Networked Embedded Systems”.

The doctoral thesis is written in Latvian, contains introduction, five chapters, conclusions, references, 8 appendices, 61 figures, 132 pages in total. A list of references consists of 108 sources.

## SATURS

Saīsinājumi.....	7
Apzīmējumi.....	8
Ievads.....	11
1.KLASISKĀ SIGNĀLU DISKRETIZĀCIJA UN ATJAUNOŠANA.....	14
1.1.Šenona nolašu teorēma.....	14
1.2.Frekvenču joslā neierobežotu signālu diskretizācija.....	16
1.3.Šenona modeļa paplašinājums.....	18
1.3.1.Diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu.....	19
1.3.2.Saskaņotā diskretizācija.....	21
1.3.3.Nolašu interpolācija.....	23
1.3.4.Aproksimācijas kļūda.....	24
1.4.Nolašu teorēmas variācijas un paplašinājumi.....	26
1.5.Kopsavilkums.....	29
2.KLASISKĀS SIGNĀLAPSTRĀDES UZLABOJUMI.....	30
2.1.Ciparu signālu apstrāde bez frekvenču uzklāšanās kropļojumiem.....	30
2.1.1.Pseidogadījumu-diskretizācija.....	32
2.1.2.Komponentu secīga izvilkšana.....	33
2.1.3.DASP pielietojums.....	34
2.2.Kompresīvā detektēšana.....	34
2.3.Signāli ar galīgu inovāciju skaitli un to apstrāde.....	38
2.3.1.Diraka impulsu virknes.....	39
2.3.2.Anihilējošais filtrs.....	40
2.3.3.Anihilējošā filtra metode.....	41
2.4.Laika kodēšana.....	43
2.5.Kopsavilkums.....	47
3.SIGNĀLATKARĪGA NOLAŠU IEGUVE UN APSTRĀDE.....	48
3.1.Svārstības ar laikā mainīgu frekvenci diskretizācija.....	48
3.2.Paplašinātā Furjē rinda.....	53
3.3.Paplašinātā Furjē transformācija.....	56
3.4.Paplašinātā nolašu teorēma.....	58
3.5.Transformēta laika signāli.....	61
3.6.No laikā mainīga spektrālā sastāva atkarīga signālu diskretizācija.....	62
3.6.1.Signāla maksimālās momentānās frekvences noteikšana.....	64
3.6.2.Diskretizācijas un atjaunošanas piemēri.....	71
3.7.Kopsavilkums.....	77
4.LĪMEŅU-ŠĶĒRSOJUMU DISKRETIZĀCIJA.....	78
4.1.LC diskretizācijas blokshēma.....	79
4.2.Signāla/kvantēšanas trokšņa attiecība.....	80
4.3.LC nolašu reprezentācija.....	81
4.4.Signālu atjaunošana no LC nolasēm.....	82
4.4.1.Precīzas atjaunošanas pietiekamais nosacījums.....	83
4.4.2.Maksimālās momentānās frekvences noteikšana no LC nolasēm.....	84
4.4.3.Iteratīvā atjaunošana.....	88
4.4.4.Atjaunošana pēc mazāko kvadrātu metodes.....	92
4.4.5.Atjaunošana pēc mazāko kvadrātu metodes ar nosacījumiem.....	92
4.4.6.LC diskretizācijas un atjaunošanas piemēri.....	96
4.5.Kopsavilkums.....	102

5.LC DISKRETIZĀCIJAS PRAKTISKĀ REALIZĀCIJA.....	103
Nobeigums.....	106
Literatūra.....	108
Ar promocijas darbu saistītās autora publikācijas.....	114
PIELIKUMI.....	116
1. pielikums.....	117
2. pielikums.....	119
3. pielikums.....	121
4. pielikums.....	126
5. pielikums.....	128
6. pielikums.....	129
7. pielikums.....	130
8. pielikums.....	131

## Saīsinājumi

Saīsinājums	Nosaukums angļu valodā	Nosaukums latviešu valodā
ACP	Analog-to-digital converter	Analogciparu pārveidotājs
AACP	Asynchronous analog-to-digital converter	Asinhrons analogciparu pārveidotājs
ASDM	Asynchronous sigma-delta modulator	Asinhronais sigma-delta modulators
CAP	Digital-to-analog converter	Ciparanalogu pārveidotājs
CMF	Conditional mean frequency	Nosacītā vidējā frekvence
CS	Compressive sensing	Kompresīvā detektēšana
DASP	Digital alias-free signal processing	Ciparu signālu apstrāde bez frekvenču uzklāšanās kropļojumiem
DFT	Discrete Fourier transform	Diskrētā Furjē transformācija
DMD	Digital micromirror device	Ciparu mikroskopu iekārta
EFS	Extended Fourier series	Paplašinātā Furjē rinda
EFT	Extended Fourier transform	Paplašinātā Furjē transformācija
EMD	Empirical Mode Decomposition	Empīriskā dekompozīcija
FROI	Finite rate of innovation	Galīgs inovāciju skaits
FS	Fourier series	Furjē rinda
FT	Fourier transform	Furjē transformācija
IEFT	Inverse extended Fourier transform	Inversā paplašinātā Furjē transformācija
IFT	Inverse Fourier transform	Inversā Furjē transformācija
LC	Level-crossing	Līmeņu šķērsošana
PSWF	Prolate spheroidal wave functions	Izstieptas sferoidālas viļņu funkcijas
RNG	Random number generator	Gadījumskaitļu ģenerators
SECOEX	Sequential component extraction	Secīga komponentu izvilšana
SQNR	Signal-to-quantization noise ratio	Signāla/kvantēšanas trokšņa attiecība
STFT	Short-time Fourier transform	Īsintervāla Furjē transformācija
UWB	Ultra-wideband	Ultraplatjosla

## Apzīmējumi

Apzīmējums	Paskaidrojums
$a_\varphi(t)$	Funkcijas $\varphi(t)$ autokorelācija
$c(t)$	Empīriskās dekompozīcijas komponente
$E$	Enerģija
$f$	Frekvence
$f_d$	Diskretizācijas frekvence
$f_{max}(t)$	Maksimālā momentānā frekvence
$F_{max}$	Maksimālā frekvence
$F[s(t)]$	Furjē transformācija
$F^{-1}[S(\omega)]$	Inversā Furjē transformācija
$\tilde{F}[s(t), g(t)]$	Paplašinātā Furjē transformācija
$\tilde{F}^{-1}[S(\omega_g), g(t)]$	Inversā paplašinātā Furjē transformācija
$h(t)$	Impulsa reakcija
$H(f)$	Frekvenču pārvades funkcija
$H(z)$	Diskrētas impulsa reakcijas $h(n)$ z-transformācija
$J_m(t)$	$m$ -kārtas Beseļa funkcija
$L_2$	Hilberta telpa
$p^m(t)$	$m$ -kārtas polinoms
$P$	Jauda
$r$	Enerģiju attiecība
$s(n)$	Diskrēts signāls
$s(t)$	Kontinuāls signāls
$s_d(t)$	Diskrēta signāla attēlojums ar nepārtrauktu laiku
$\hat{s}(t)$	Aproksimācija
$\bar{s}(t)$	Vidējā vērtība
$s'(t)$	Pirmās kārtas atvasinājums
$s^{(m)}(t)$	$m$ -kārtas atvasinājums
$s^{(-1)}(\cdot)$	Inversais signāls
$s^*(t)$	Kompleksi saistītais signāls
$S(f), S(\omega)$	Ar Furjē transformāciju iegūtais spektrs
$S(\omega_g)$	Ar paplašināto Furjē transformāciju iegūtais spektrs

$S(e^{j\omega})$	Ar diskrēta laika Furjē transformāciju iegūtais spektrs
$S_m$	Diskrētās Furjē transformācijas koeficienti
$S(t, f)$	Laika-frekvences sadalījums
$\mathbf{s}$	Kolonnas vektors
$\mathbf{S}$	Matrica
$\mathbf{S}^T$	Transponētā matrica
$\mathbf{S}^{-1}$	Inversā matrica
$\mathbf{S}^+$	Pseudoinversā matrica
$t$	Nepārtraukts laiks
$t_n$	Diskrēts laiks
$T$	Diskretizācijas solis
$V$	Frekvenču joslā ierobežotu signālu telpa
$V(\varphi)$	Signālu telpa
$V_T(\varphi)$	Mērogota signālu telpa
$Z$	Veselo skaitļu kopa
$\beta^m(t)$	$m$ -kārtas B-splains
$\delta_{n,k}$	Kronekera delta
$\delta(t)$	Diraka delta funkcija
$\Delta l$	Attālums starp vienmērīgi izvietotiem secīgiem līmeņiem
$\Delta t_n$	Laika intervāls starp divām secīgām nolasēm
$\Delta t_{max}$	Lielākais laika intervāls starp secīgām nolasēm
$\varepsilon(t)$	Kļūdas signāls
$\Theta$	Signāla periods/garums
$\zeta(n)$	Anihilējošais filtrs
$\rho$	Inovāciju skaitlis
$\tau$	Laiks
$\Upsilon$	Paplašinātās diskretizācijas solis
$\varphi(t)$	Bāzes funkcija/impulsa reakcija
$\hat{\varphi}(t)$	Duālās bāzes funkcija
$\varphi_{int}(t)$	Interpolācijas funkcija
$\Phi(t)$	Momentānā fāze
$\omega$	Cikliskā frekvence
$\Omega$	Ar Furjē transformāciju iegūtā spektra maksimālā frekvence
$\Omega_g$	Ar paplašināto Furjē transformāciju iegūtā spektra maksimālā frekvence

$s(t) * x(t)$	Konvolūcija
$s(t) \otimes x(t)$	Paplašinātā konvolūcija
$\langle x, y \rangle$	Skalārais reizinājums
$\ x\ $	Norma
$\lceil x \rceil$	Mazākais veselais skaitlis $n$ , kuram izpildās: $n \geq x$
$\lfloor x \rfloor$	Lielākais veselais skaitlis $n$ , kuram izpildās: $n \leq x$
$\sup_{n \in Z} (x_n)$	Mazākais skaitlis $y$ , kuram visiem $n \in Z$ izpildās: $x_n \leq y$
$A_V: L_2 \rightarrow V$	Ortogonalās projekcijas operators

## Ievads

Pasaulē ciparu elektronisko sistēmu izstrāde galvenokārt balstās uz sinhrono jeb taktimpulsu tehnoloģiju, kurai pamatā ir sistēmas elementu vadība (sinhronizēšana) ar taktimpulsu ģeneratoru [76], [77]. Samazinot šādu sistēmu mikroshēmu izmērus un palielinot to ātrdarbību, galvenās problēmas rada:

- ◆ signālu parazitiskās aizkaves, kuru lielums var būt atkarīgs no temperatūras un citiem ārējiem faktoriem;
- ◆ liekā siltuma aizvadīšana – strādājot sinhronā režīmā, visi funkcionālie mezgli enerģiju patērē pastāvīgi, neatkarīgi no tā, vai tie konkrētā brīdī pilda vai nepilda savu uzdevumu, tāpēc taktimpulsu frekvences pieaugums veicina pastiprinātu shēmas elementu siltuma izkliedi, kas tiek aizvadīta ar samērā liela izmēra dzesēšanas iekārtām, tādējādi ierobežojot miniatūru sistēmu veidošanas iespējas.

Rezultātā sinhronitātes nodrošināšanai tiek ieviesti samērā sarežģīti risinājumi, kas palielina mikroshēmu izmērus un patērētās enerģijas daudzumu [77].

Nosaukto problēmu esamība atkārtoti ir radījusi interesi par asinhronām sistēmām, kuru vadība nenotiek ar taktimpulsu ģeneratoru, bet gan ar “notikumu” plūsmu, kas vispārīgā gadījumā var būt laikā nevienmērīga [2], [41], [42], [59], [69], [77]. Tas salīdzinājumā ar sinhronām sistēmām dod vairākas priekšrocības [87]:

- ◆ zems elektroenerģijas patēriņš, kas saistīts ar asinhrono ķēžu enerģijas patēriņu tikai noteiktos laika brīžos un noteiktās ķēdes daļās;
- ◆ liela ātrdarbība, ko nosaka nevis globālā “sliktākā gadījuma” laika aizkave, bet gan atsevišķo ķēdes mezglu lokālās aizkaves;
- ◆ ievērojami mazāks elektromagnētiskais starojums, kas attiecīgi samazina ķēdē ienestos trokšņus;
- ◆ mazāka jutība pret barošanas sprieguma, temperatūras un izstrādes procesa parametru variācijām;
- ◆ labāka modularitāte un sasaiste starp atsevišķiem ķēdes mezgliem;
- ◆ sinhronitātes nodrošināšana vairs nav nepieciešama.

Neskatoties uz nosauktajām priekšrocībām, asinhrono sistēmu pielietojums praksē joprojām nav liels, kam par iemeslu ir to nesavietojamība ar klasiskajām (sinhronajām) sistēmām. Piemēram, veicot analogo signālu pārveidošanu ciparu formā, asinhrono sistēmu gadījumā tiek izmantoti asinhroni analogciparu pārveidotāji (AACP), kas ieejas analogā

signāla vērtības var fiksēt nevienmērīgi izvietotos laika momentos [49]. Šāda pieeja ļauj veidot no signāla atkarīgus AACP, kuru darbības aktivitāti (enerģijas patēriņu) nosaka pats signāls [2], [46] – jo straujāk mainās signāls, jo vairāk nolašu, un otrādi – jo lēnāk mainās signāls, jo mazāk nolašu. Rezultātā samazinās pārveidotāja enerģijas patēriņš un iegūto nolašu skaits, kas īpaši aktuāli ir bezvadu sensoru tīklos [67], bet problemātiska kļūst iegūto nolašu pēcapstrāde, ko nosaka to laikā nevienmērīgais izvietojums, līdz ar to klasiskā signālapstrāde šajā gadījumā nav pielietojama.

Viens no veidiem, kā sasaistīt asinhronās sistēmas ar sinhronām, ir veikt ciparu signālu pārrēķinu no nevienmērīgi uzdotām vērtībām uz laikā vienmērīgi izvietotām nolasēm, ko ekvivalenti var uzskatīt par signāla analogās formas atjaunošanu un sekojošu tā diskretizāciju ar klasisko ACP. Problēma šajā gadījumā ir izstrādāt nevienmērīgi diskretizētu signālu atjaunošanas paņēmienus.

Saistībā ar to promocijas darba autors ir izvirzījis mērķi izpētīt un teorētiski pamatot, kā atkarībā no signāla laikā mainīgās aktivitātes izvēlēties nolašu izvietojumu laikā, lai tās precīzi reprezentētu analogo signālu, kā arī izpētīt, vai šīs zināšanas var izmantot signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas iegūtas signālatkarīgu pārveidojumu rezultātā. Attiecīgie uzdevumi mērķa sasniegšanai ir:

- ♦ izpētīt literatūrā sastopamās signālu diskretizācijas metodes;
- ♦ izstrādāt un pārbaudīt teoriju un metodes signālu signālatkarīgai diskretizācijai un atjaunošanai.

Promocijas darba struktūra atbilstoši izvirzītajiem uzdevumiem ir sekojoša. Pirmajā nodaļā ir apskatīta signālu klasiskā diskretizācija, kas balstās uz Naikvista kritērija ievērošanu attiecībā uz signāla frekvenču joslu. Apskatīts ir arī ideālā diskretizācijas modeļa paplašinājums laika-invariantām telpām, kas satur daudz plašāku par frekvenču joslā ierobežotu signālu kopu, kā arī parādīti svarīgākie nolašu teorēmas vispārinājumi.

Otrajā nodaļā ir apskatīti vairāki no klasiskās apstrādes atšķirīgi signālu diskretizācijas paņēmieni, kas balstās uz Naikvista kritērija ievērošanu attiecībā uz signāla brīvības pakāpēm, ko var interpretēt kā parametru skaitu, kas raksturo doto signālu. Nodaļas beigās apskatīta arī signālu laika kodēšana, kas ir analogo signālu reprezentācija ar diskrēta laika secībām.

Trešajā nodaļā ir atspoguļoti autora pētījumi saistībā ar signālu signālatkarīgu apstrādi. Atbilstoši izvirzītajam mērķim ir izstrādāts teorētisks pamatojums pieņemumam, ka signālus ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu precīzi var reprezentēt ar nolasēm, kuru izvietojumu laikā nosaka signāla aktivitāte – jo straujāk mainās signāls (jo lielāka lokālā frekvence), jo biežāk tiek ņemtas nolases, un otrādi – jo lēnāk mainās signāls (jo mazāka lokālā frekvence), jo

lielāki ir laika intervāli starp secīgām nolasēm.

Ceturtajā nodaļā seko izstrādātās teorijas pielietojums signālu atjaunošanai no līmeņu-šķērsojumu nolasēm. Viens no galvenajiem rezultātiem ir – formulēts pietiekamais nosacījums signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, saskaņā ar kuru atjaunošana ir iespējama pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli.

Piektajā nodaļā ir aprakstīta līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas praktiskā realizācija.

# 1. KLASISKĀ SIGNĀLU DISKRETIZĀCIJA UN ATJAUNOŠANA

Šajā nodaļā tiks apskatīta klasiskā diskretizācija, kam par pamatu ir Šenona nolašu teorēma. Apskatīts tiks arī Šenona modeļa paplašinājums frekvenču joslā neierobežotiem signāliem, kā arī vairāki nozīmīgi nolašu teorēmas vispārinājumi.

## 1.1. Šenona nolašu teorēma

1949. gadā Klods Šenons publicēja rakstu [72], kas lika pamatus mūsdienu informācijas teorijai. Raksta sākuma formulēta nolašu teorēma, pie kuras neatkarīgi no Šenona nonākuši arī citi zinātnieki [43], [91].

**Teorēmas formulējums:** frekvenču joslā līdz  $F_{max}$  ierobežots signāls  $s(t)$  ir pilnībā determinēts, ja uzdotas tā vērtības vienmērīgi izvietotos laika momentos ar soli  $T = 1/(2F_{max})$ . Tas nozīmē, ka signālu pilnībā reprezentē tā nolases  $s(t_n)$ , kas ņemtas laika momentos  $t_n = nT$ , kur  $n \in Z$ .

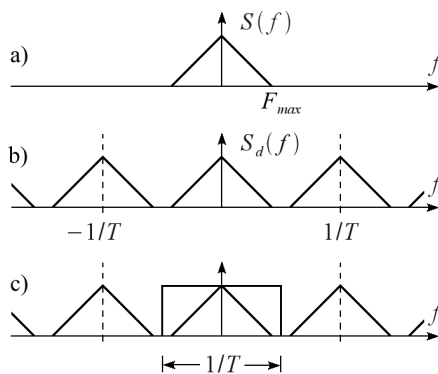
Teorēmu papildina signāla atjaunošanas formula

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \operatorname{sinc}(\pi t/T - n\pi), \quad (1.1)$$

kur

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}. \quad (1.2)$$

**Teorēmas pierādījums.** Nolašu teorēmas interpretējums frekvenču apgabalā parādīts 1.1. attēlā [81].



1.1. att. Nolašu teorēmas interpretācija frekvenču apgabalā: a) analogā signāla spektrs, b) diskretā signāla spektrs, c) diskretā signāla filtrācija ar ideālu zemo frekvenču filtru sākotnējā analogā signāla atjaunošanai

Attēlā 1.1.a parādīts analogā signāla  $s(t)$  spektrs  $S(f)$ , kuru iegūst ar Furjē transformāciju

$$S(f) = F[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (1.3)$$

Ņemot vērā, ka  $S(f) = 0$ , ja  $|f| > F_{max}$ , tad signāls ir frekvenču joslā  $[-F_{max}, F_{max}]$  ierobežots.

Ņemot signāla vērtības diskrētos laika momentos  $t_n = nT$ ,  $n \in Z$ , iegūst diskrētu signālu, kura nepārtraukta laika reprezentācijai lieto delta funkciju  $\delta(t)$  secību

$$s_d(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (1.4)$$

Pielietojot Furjē transformāciju  $F[s_d(t)]$ , atrod  $s_d(t)$  spektru:

$$S_d(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - \frac{n}{T}). \quad (1.5)$$

No (1.5) izriet, ka diskrētā signāla spektrs ir periodisks, tā atkārtošanās periods pa frekvenču asi ir  $1/T$ , un to veido ar soli  $1/T$  nobīdītu analogā signāla  $s(t)$  spektru bezgalīga summa (1.1.b attēls). Ja  $S_d(f)$  pareizina ar loga funkciju

$$H(f) = \begin{cases} T, & \text{ja } |f| \leq 1/(2T) \\ 0, & \text{citur,} \end{cases} \quad (1.6)$$

tad iegūst analogā signāla spektru

$$S_d(f) H(f) = S(f). \quad (1.7)$$

Tā kā reizināšana frekvenču apgabalā ir ekvivalenta filtrācijai, tad analogā signāla atjaunošanai nepieciešama diskrētā signāla (1.4) filtrācija ar ideālu zemo frekvenču filtru, kura pārvades raksturlīkne sakrīt ar izteiksmi (1.6). Filtra izejas signāls sakrīt ar sākotnējo analogo signālu

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_d(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (1.8)$$

kur  $h(t)$  ir filtra impulsa reakcija, kas iegūstama ar inverso Furjē transformāciju

$$h(t) = F^{-1}[H(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (1.9)$$

No (1.6) un (1.9) iegūst

$$h(t) = \text{sinc}(\pi t/T). \quad (1.10)$$

Savukārt no (1.8) un (1.4) izriet

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \delta(\tau - nT) \right) h(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) h(t - nT). \quad (1.11)$$

Liekot impulsa reakciju (1.10) izteiksmē (1.11), iegūst

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \text{sinc}(\pi(t - nT)/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \text{sinc}(\pi t/T - n\pi), \quad (1.12)$$

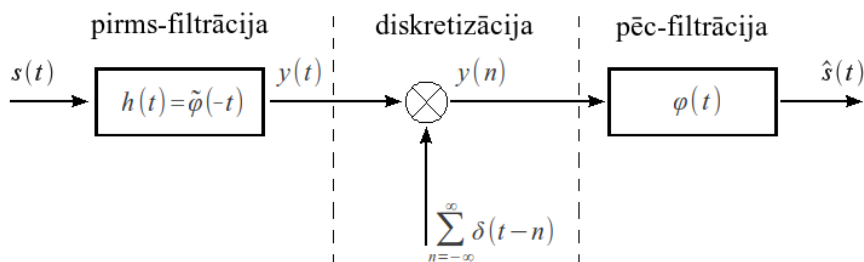
kas sakrīt ar signāla atjaunošanas formulu (1.22).

No 1.1. attēla arī redzams, ja signāla diskretizācijas frekvenci izvēlēties  $1/T < 2F_{max}$ , tad notiks frekvenču uzklāšanās un signāla atjaunošana nebūs iespējama. Tāpēc soļa vērtībai jābūt

$$T \leq \frac{1}{2F_{max}}. \quad (1.13)$$

## 1.2. Frekvenču joslā neierobežotu signālu diskretizācija

Šenona nolašu teorēma ir pielietojama frekvenču joslā ierobežotiem signāliem. Ja josla ir neierobežota, tad signālu pirms diskretizācijas filtrē ar zemo frekvenču filtru, lai novērstu frekvenču uzklāšanos. Klasisks šāds trīs soļu diskretizācijas un atjaunošanas piemērs, ja  $T=1$ , parādīts 1.2. attēlā [81].



1.2. att. Frekvenču joslā neierobežotu signālu diskretizācija un atjaunošana

Ietvertie soļi ir:

- 1) Pirms-filtrācija – ieejas signālu  $s(t)$  filtrē ar frekvenču pret-uzklāšanās filtru  $h(t)$ , kura izejas signāls ideāla filtra  $h(t) = \text{sinc}(\pi t)$  gadījumā ir

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \text{sinc}(\pi(\tau - t)) d\tau. \quad (1.14)$$

Ideālais filtrs (praksē nav realizējams) pilnībā novērš frekvenču uzklāšanos un neienes kropļojumus pārvades joslā.

- 2) Diskretizācija – filtra izejas signālu  $y(t)$  diskretizē punktos  $t_n = n$ , iegūstot nolases

$$y(n) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \text{sinc}(\pi\tau - n\pi) d\tau. \quad (1.15)$$

- 3) Pēc-filtrācija – diskrēto signālu  $y(n)$  filtrē ar analogo filtru  $\varphi(t)$ , iegūstot atjaunoto signālu

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \varphi(t-n). \quad (1.16)$$

Atbilstoši klasiskajai pieejai pirms-filtrācijas (pret-uzklāšanās) un pēc-filtrācijas

(atjaunošanas) filtri abi ir ideāli zemo frekvenču filtri ar impulsa reakcijām  $h(t) = \varphi(t) = \text{sinc}(\pi t)$ , lai gan to izvēle var būt plašāka ar nosacījumu, ka filtri ir biortogonāli [81].

Apskatīsim tagad 1.2. attēlā parādītās blokshēmas ģeometrisko interpretāciju Hilberta telpai  $L_2$ , kas sastāv no visiem tiem signāliem, kuru enerģija ir galīga, t.i.  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ .

Telpai  $L_2$  definē skalāro reizinājumu

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t) dt \quad (1.17)$$

un normu

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad (1.18)$$

kur  $x^*(t)$  ir signāla  $x(t)$  kompleksi saistītais signāls. Pieņemsim, ka signāls  $s(t)$ , kuru vēlamies diskretizēt, pieder Hilberta telpai, kas ir daudz plašāka par frekvenču joslā ierobežotu signālu telpu, kuru apzīmēsim ar  $V$ . Lai diskretizāciju veiktu saskaņā ar nolašu teorēmu, diskretizē nevis pašu signālu  $s(t) \in L_2$ , kas frekvenču joslā var būt neierobežots, bet gan tā aproksimāciju  $\tilde{s}(t) \in V$ , kuru atrod, minimizējot kļūdas signāla  $\varepsilon(t) = s(t) - \hat{s}(t)$  enerģiju. Ņemot vērā, ka telpai  $V$  piederošos signālus apraksta izteiksme (1.1), tad signālu  $\tilde{s}(t)$ , ja  $T=1$ , apraksta izteiksme

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(n) \text{sinc}(\pi t - \pi n), \quad (1.19)$$

un par minimizācijas uzdevumu kļūst nolašu  $\tilde{s}(n)$  atrašana, kuru atrisinot (skat. 1.pielikumu) iegūst

$$\tilde{s}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \text{sinc}(\pi t - \pi n) dt. \quad (1.20)$$

Salīdzinot šo rezultātu ar izteiksmi (1.15), izriet, ka aproksimācija ar mazāko kvadrātisko kļūdu dod nolašu  $\tilde{s}(n)$  vērtības  $\tilde{s}(n) = y(n)$ , kas iegūstamas, filtrējot ieejas signālu  $s(t) \in L_2$  ar ideālu zemo frekvenču filtru un tālāk veicot izejas signāla  $y(t)$  diskretizāciju (1.2. attēlā 1. un 2. solis), turklāt  $\tilde{s}(t) = y(t)$ .

Ja ievieš ortogonālās projekcijas operatoru  $A_V: L_2 \rightarrow V$ , ar kuru signāls  $s(t) \in L_2$  tiek projicēts telpā  $V$  atbilstoši izteiksmei

$$A_V[s] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle s, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad (1.21)$$

kur  $\varphi_n(t) = \text{sinc}(\pi t - \pi n)$ , tad no (1.19), (1.20) un (1.21) iegūst:

$$\tilde{s}(t) = A_V[s]. \quad (1.22)$$

Secinājums ir: tradicionālā diskretizācija ar ideālu pirms-filtrāciju dod aproksimāciju  $\tilde{s}(t) = A_V[s]$ , kas ir ieejas signāla  $s(t) \in L_2$  ortogonāla projekcija frekvenču joslā ierobežotu signālu telpā  $V$ . Citiem vārdiem sakot,  $\tilde{s}(t)$  ir signāla  $s(t)$  aproksimācija ar mazāko kvadrātisko kļūdu telpā  $V$ . Tātad, ja  $s(t) \in V$ , tad  $s(t) = A_V[s]$ , kas ir Šenona teorēmas īsāks formulējums.

### 1.3. Šenona modeļa paplašinājums

Kad ir veikta nolašu teorēmas plašāka interpretācija Hilberta telpai, nākamais solis ir vispārināt šo pieeju citām signālu klasēm, ko panāk, funkciju  $\text{sinc}(\pi t)$  vispārīgā gadījumā aizvietojot ar citu funkciju  $\varphi(t)$ , un definējot signālu telpu

$$V(\varphi) = \left\{ s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \varphi(t-n) \right\}. \quad (1.23)$$

Tas nozīmē, ka jebkuru kontinuālu signālu  $s(t) \in V(\varphi)$  raksturo koeficientu  $c(n)$  secība, kas ir šī signāla diskrēta reprezentācija un var tikt izmantota tā apstrādei vai kodēšanai. Koeficienti  $c(n)$  var nebūt signāla nolases, un funkcija  $\varphi(t)$  var atšķirties no  $\text{sinc}(\pi t)$ , tāpēc viens no mērķiem ir atrast tādu funkciju  $\varphi(t)$ , kas skaitliski būs vieglāk apstrādājama un kurai būtu daudz mazāks rimšanas laiks [81].

Lai šādam analogs/diskrēts signālu modelim būtu jēga, jāizpildās dažiem nosacījumiem [81]. Pirmkārt, koeficientu absolūto vērtību kvadrātu summai jākonverģē uz galīgu skaitli. Otrkārt, reprezentācijai jābūt stabilai (mazas koeficientu izmaiņas dod mazas signāla izmaiņas) un viennozīmīgi definētai, kas nozīmē – bāzes funkcijām  $\{\varphi_n = \varphi(t-n)\}_{n \in Z}$  eksistē divas pozitīvas konstantes  $0 < B$  un  $D < \infty$  tā, ka jebkurai koeficientu secībai  $\{c(n)\}_{n \in Z}$  izpildās nevienādība

$$B \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)|^2 \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \varphi_n \right\|^2 \leq D \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(n)|^2. \quad (1.24)$$

No (1.24) kreisās puses nevienādības izriet, ja  $s(t) = \sum_{n \in Z} c(n) g_n = 0$ , tad  $c(n) = 0$  visiem  $n \in Z$ , kas vienlaikus nozīmē – bāzes funkcijas ir lineāri neatkarīgas un katrs signāls  $s(t) \in V(\varphi)$  raksturojas ar saviem unikāliem koeficientiem  $\{c(n)\}_{n \in Z}$ , turklāt signāla enerģija ir ierobežota, kas izriet no (1.24) labās puses nevienādības.

Trešais un pēdējais nosacījums, kas nodrošina ieejas signāla pēc patikas precīzu aproksimāciju, ja vien diskretizācijas solis ir pietiekami mazs, ir vienotā sadalījuma

nosacījums

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t+n)=1 \quad (1.25)$$

jebkurai reālai  $t$  vērtībai [81].

Bāzes funkciju piemēri, kurām izpildās minētie nosacījumi, ir [81]:

- 1) *sinc* funkcija  $\text{sinc}(\pi t)$  (1.3. attēls), kas ir labi lokalizēta frekvenču apgabalā, bet laika apgabalā rimst lēni;
- 2) nultās kārtas B-splains

$$\beta^0(t)=\begin{cases} 1, & \text{ja } |t|<1/2 \\ 0, & \text{citur,} \end{cases} \quad (1.26)$$

kas ir vienkāršākā un īsākā funkcija, kurai izpildās vienotā sadalījuma nosacījums;

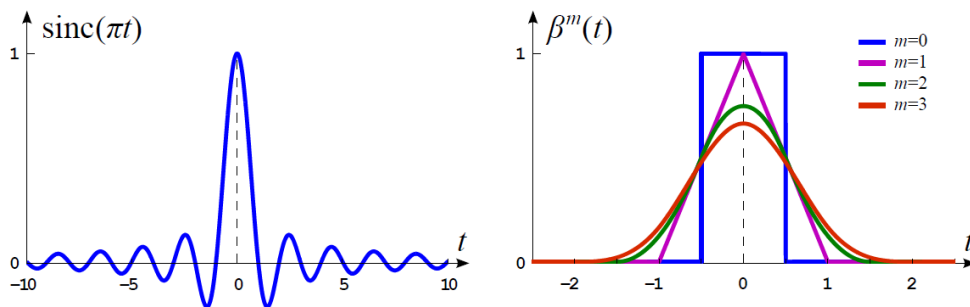
- 3) augstāku kārtu B-splaini

$$\beta^m(t)=\beta^{m-1}(t)*\beta^0(t), \quad m \geq 1, \quad (1.27)$$

kas no nulles atšķiras tikai ierobežotā laika intervālā  $[-(n+1)/2, (n+1)/2]$  (1.3. attēls);

- 4) mērogojamas vilnīšu (*wavelet*) funkcijas [23], [56].

Ņemot vērā, ka B-splaini ir labi lokalizēti laika apgabalā, tos bieži izmanto praksē īpaši attēlu apstrādē [82].



1.3. att. Bāzes funkciju piemēri: *sinc* funkcija (pa kreisi) un B-splaini (pa labi)

### 1.3.1. Diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu

Kad ir definēta signālu telpa  $V(\varphi)$ , nākamais uzdevums ir izteiksmē (1.23) lietoto koeficientu  $c(n)$  noteikšana tā, lai signāls  $\tilde{s}(t) \in V(\varphi)$  būtu pietiekami precīza ieejas signāla  $s(t) \in L_2$  aproksimācija. Optimālais risinājums pēc mazāko kvadrātu metodes ir ortogonālā projekcija

$$A_{V(\varphi)}[s]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle s, \hat{\varphi}_n \rangle \varphi_n, \quad (1.28)$$

kur  $\hat{\varphi}_n$  ir funkciju  $\varphi_n = \varphi(t-n)$  duālās bāzes funkcijas [81]. Izteiksme (1.28) ir līdzīga izteiksmei (1.21), tikai šajā gadījumā analīzes un sintēzes funkcijas  $\hat{\varphi}(t)$  un  $\varphi(t)$  ne vienmēr ir identiskas.

Saskaņā ar duālo telpu definīciju duālā bāze  $\{\hat{\varphi}_n\}_{n \in Z}$  ar funkcijām  $\hat{\varphi}_n \in V(\varphi)$  ir unikāla, un to nosaka biortogonalitātes nosacījums

$$\langle \hat{\varphi}_n, \varphi_k \rangle = \delta_{n,k}, \quad (1.29)$$

kur

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{ja } n=k \\ 0, & \text{ja } n \neq k \end{cases} \quad (1.30)$$

ir Kronekera delta [3]. Līdzīgi kā  $\varphi_n$ , arī funkciju  $\hat{\varphi}_n$  forma nav atkarīga no laika aiztures  $n$ , t.i.,  $\hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}(t-n)$ .

Nemot vērā, ka  $\hat{\varphi}(t) \in V(\varphi)$ , tad to var izteikt ar funkciju  $\varphi_n$  lineāru kombināciju

$$\hat{\varphi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) \varphi(t-n), \quad (1.31)$$

kur  $p(n)$  ir koeficienti, kas atkarīgi no  $\varphi(t)$ . Rakstot (1.31) frekvenču apgabalā, iegūst

$$\hat{\Phi}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) \Phi(\omega) e^{-j\omega n} = \Phi(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-j\omega n} = \Phi(\omega) P(e^{j\omega}), \quad (1.32)$$

kur  $\hat{\Phi}(\omega) = F[\hat{\varphi}(t)]$ ,  $\Phi(\omega) = F[\varphi(t)]$  un

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-j\omega n} \quad (1.33)$$

ir koeficientu  $p(n)$  diskrēta laika Furjē transformācija [65]. Liekot (1.31) skalārā reizinājuma izteiksmē (1.29), iegūst

$$\langle \hat{\varphi}(t-n), \varphi(t-k) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(m) \langle \varphi(t-n-m), \varphi(t-k) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(m) a_{\varphi}(k-n-m) = \delta_{nk}, \quad (1.34)$$

kur  $a_{\varphi}(t)$  ir autokorelācija

$$a_{\varphi}(t) = \langle \varphi(\tau), \varphi(\tau-t) \rangle. \quad (1.35)$$

Tālāk, rakstot (1.34) frekvenču apgabalā, iegūst

$$P(e^{j\omega}) A_{\varphi}(e^{j\omega}) = 1, \quad (1.36)$$

kur  $A_{\varphi}(e^{j\omega})$  ir  $a_{\varphi}(n)$  diskrēta laika Furjē transformācija

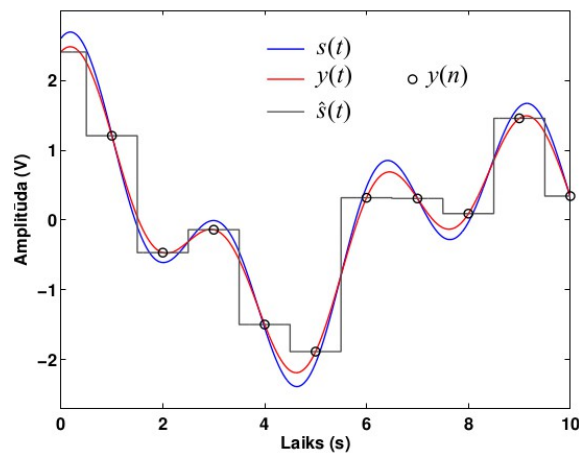
$$A_{\varphi}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\varphi}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2\pi n)|^2. \quad (1.37)$$

Rezultātā no (1.32), (1.36) un (1.37) iegūst

$$\hat{\Phi}(\omega) = \Phi(\omega) P(e^{j\omega}) = \frac{\Phi(\omega)}{A_{\varphi}(e^{j\omega})} = \frac{\Phi(\omega)}{\sum_{n \in Z} |\Phi(\omega + 2\pi n)|^2}. \quad (1.38)$$

Tātad izvēlētais sintēzes filtrs  $\varphi(t)$  nosaka, kādam jābūt optimālajam analīzes filtram  $\hat{\varphi}(t)$ , kas 1.2. attēlā aizstāj ideālo zemo frekvenču filtru  $h(t)$  un nosaka izejas signāla  $y(t)$  nolašu vērtības  $y(n) = \langle s, \hat{\varphi}_n \rangle$ . Ja  $\varphi_n$  veido ortonormālu funkciju bāzi, tad  $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ , kas izriet no biortogonalitātes nosacījuma (1.29).

Piemērs, kad  $\varphi(t) = \beta^0(t)$ , parādīts 1.4. attēlā. Tā kā  $\varphi_n = \beta^0(t-n)$  veido ortonormālu funkciju bāzi, tad ieejas signāla  $s(t)$  optimālai pirms-filtrācijai lieto impulsa reakciju  $\hat{\varphi}(t) = \beta^0(t)$ . Filtra izejas signālu  $y(t)$  tālāk diskretizē punktos  $t_n = n$ , un iegūtās nolases  $y(n)$  filtrē ar sintēzes filtru  $\varphi(t)$ , lai iegūtu atjaunoto signālu  $\hat{s}(t) \in V(\varphi)$ , kas ir ieejas signāla  $s(t) \in L_2$  aproksimācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu telpā  $V(\varphi)$ .



1.4. att. Ieejas signāla  $s(t) \in L_2$  ortogonālā projekcija  $\hat{s}(t) \in V(\varphi)$ , ja  $\varphi(t) = \beta^0(t)$

### 1.3.2. Saskaņotā diskretizācija

Iepriekšējā nodaļā tika parādīts, kā veidot optimālu diskretizācijas sistēmu, tomēr praksē bieži vien 1.2. attēlā parādītais priekš-filtrs  $h(t)$  (datu ieguves iekārta) ir dots jau iepriekš un ne vienmēr ir optimāls. Signāla  $s(t)$  mērījumus šajā gadījumā var izteikt:

$$y(n) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) h(n-t) dt = \langle s, \varphi_1(t-n) \rangle, \quad (1.39)$$

kur  $\varphi_1(t) = h(-t)$ . Zinot  $y(n)$ , signāla  $s(t)$  aproksimāciju  $\hat{s}(t)$  meklē formā (1.23) ar sintēzes funkciju  $\varphi(t) = \varphi_2(t)$ .

Risinājumu šajā gadījumā var balstīt uz saskaņošanas ideju [83] – signālu  $s(t)$  aproksimē tā, lai pēc  $\hat{s}(t)$  diskretizācijas ar to pašu datu ieguves iekārta, iegūtās nolases sakristu ar sākotnēji iegūtajiem ieejas signāla mērījumiem. Tātad spēkā jābūt vienādībai

$$y(n) = \langle s, \varphi_1(t-n) \rangle = \langle \hat{s}, \varphi_1(t-n) \rangle, \quad (1.40)$$

kur

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \varphi_2(t-n). \quad (1.41)$$

Liekot (1.41) izteiksmē (1.40), iegūst

$$y(n) = \langle \hat{s}, \varphi_1(t-n) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) \langle \varphi_2(t-m), \varphi_1(t-n) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) a_{12}(n-m), \quad (1.42)$$

kur  $a_{12}(t)$  ir savstarpējā korelācija

$$a_{12}(t) = \langle \varphi_1(\tau-t), \varphi_2(\tau) \rangle. \quad (1.43)$$

Rakstot (1.42) frekvenču apgabalā, iegūst  $Y(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega}) A_{12}(e^{j\omega})$ , no kurienes izriet

$$C(e^{j\omega}) = \frac{1}{A_{12}(e^{j\omega})} Y(e^{j\omega}). \quad (1.44)$$

Savukārt diskrētās kompozīcijas (1.42) z-transformācija ir  $Y(z) = C(z) A_{12}(z)$ , no kurienes izriet

$$C(z) = \frac{1}{A_{12}(z)} Y(z) = Q(z) Y(z), \quad (1.45)$$

kur

$$Q(z) = \frac{1}{A_{12}(z)} = \frac{1}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{12}(n) z^{-n}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(n) z^{-n} \quad (1.46)$$

ir ciparu korekcijas filtrs. Ņemot vērā, ka izteiksme (1.45) ir ekvivalenta kompozīcijai

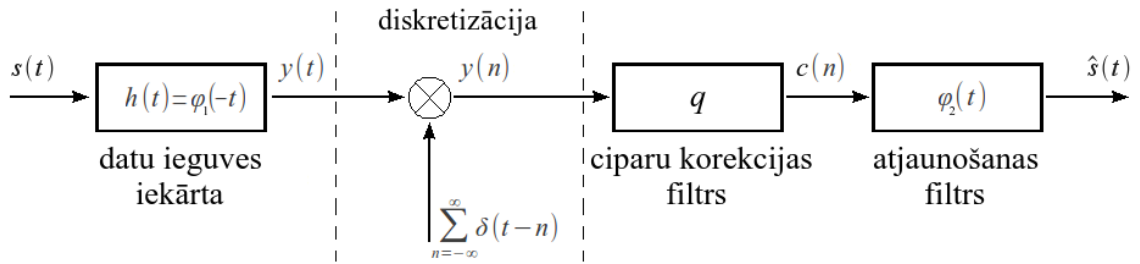
$$c(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) q(n-m), \quad (1.47)$$

taid signālu  $\hat{s}(t)$  atbilstoši izteiksmei (1.41) var rakstīt

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y * q)(n) \varphi_2(t-n). \quad (1.48)$$

Saistībā ar iegūto rezultātu spēkā ir sekojoša teorēma [83]: ja  $|A_{12}(e^{j\omega})| > 0$  gandrīz visur, tad katram  $s(t) \in H$  eksistē unikāla aproksimācija  $\hat{s}(t) \in V(\varphi_2)$ , kas ir saskanīga ar  $s(t)$  tādā ziņā, ka izpildās vienādība (1.40). Teorēma ir spēkā visiem telpas  $H = L_2$  signāliem, ja priekš-filtram  $\varphi_1(t)$  izpildās nevienādība (1.24). No teorēmas arī izriet, ka atjaunotais signāls (1.48) precīzi sakrīt ar ieejas signālu  $s(t)$ , ja  $s(t) \in V(\varphi_2)$ .

Saskaņotās diskretizācijas blokshēma, ja datu ieguve nav optimāla, parādīta 1.5. attēlā [81]. Atšķirībā no 1.2. attēla šajā gadījumā papildus nāk klāt ciparu korekcijas filtrs, kas ieejas signāla mērījumus  $y(n)$  pārveido koeficientu  $c(n)$  secībā.



1.5. att. Saskaņotās diskretizācijas un atjaunošanas blokhēma

### 1.3.3. Nolašu interpolācija

Viens no diskretizācijas pamatpaņēmiem ir fiksēt ieejas signāla  $s(t)$  vērtības diskrētos laika momentos, kā rezultātā iegūtas tiek signāla nolases  $s(n)$ . Aproximācijas uzdevums šajā gadījumā ir atrast koeficientu  $c(n)$  vērtības izteiksmē (1.23) tā, lai signāls  $\hat{s}(t) \in V(\varphi)$  interpolētu ieejas signāla nolases  $s(n)$ . Uzdevums kļūst ekvivalents iepriekšējā nodaļā apskatītajam saskaņošanas uzdevumam, ja par analīzes filtru (datu ieguves iekārtu) izvēlas delta funkciju  $\varphi_1(t) = \delta(t)$ , bet par sintēzes filtru – funkciju  $\varphi_2(t) = \varphi(t)$ . Rezultātā atrisinot vienādojumu

$$s(n) = \langle s, \delta(t-n) \rangle = \langle \hat{s}, \delta(t-n) \rangle, \quad (1.49)$$

iegūst ciparu korekcijas filtru

$$Q_{\text{int}}(z) = \frac{1}{\sum_{n \in Z} \varphi(n) z^{-n}} = \sum_{n \in Z} q_{\text{int}}(n) z^{-n} \quad (1.50)$$

un signāla  $s(t)$  aproksimāciju

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{s(n) * q_{\text{int}}(n)}_{c(n)} \varphi(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \varphi_{\text{int}}(t-n), \quad (1.51)$$

kur  $\varphi_{\text{int}}(t)$  ir interpolācijas funkcija

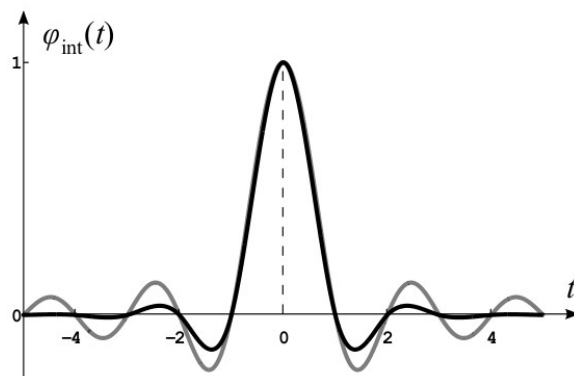
$$\varphi_{\text{int}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{\text{int}}(n) \varphi(t-n) \quad (1.52)$$

ar tās raksturīgo īpašību [81]

$$\varphi_{\text{int}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n=0 \\ 0, & \text{ja } n \neq 0. \end{cases} \quad (1.53)$$

Ja īpašība (1.53) izpildās funkcijai  $\varphi(t)$  (piemēram, *sinc* funkcijai  $\text{sinc}(\pi t)$  un nultās un pirmās kārtas B-splainiem), tad no (1.50) un (1.52) seko  $Q_{\text{int}}(z) = 1$  un  $\varphi_{\text{int}}(t) = \varphi(t)$ . Ja šī īpašība neizpildās, tad  $\varphi_{\text{int}}(t)$  meklē atbilstoši izteiksmēm (1.50) un (1.52) – viens tāds piemērs, ja  $\varphi(t) = \beta^3(t)$ , dots 2. pielikumā, un iegūtā interpolācijas funkcija, kas rimst daudz

ātrāk par *sinc* funkciju, parādīta 1.6. attēlā ar tumšo līniju.



1.6. att. Interpolācijas funkcijas: *sinc* (gaišā līnija) un trešās kārtas B-splainu interpolācijas funkcija (tumšā līnija)

### 1.3.4. Aproximācijas kļūda

Iepriekš apskatītās trīs pieejas (diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu, saskaņotā diskretizācija un nolašu interpolācija) ir pielietojamas telpas  $L_2$  signāliem, kas ir daudz plašāka par frekvenču joslā ierobežotu signālu telpu. Perfekta signālu  $s(t) \in L_2$  atjaunošana formā (1.23) vispārīgā gadījumā nav iespējama, ja  $s(t) \notin V(\varphi)$ , tāpēc būtisks ir jautājums par aproximācijas kļūdu. Klasiskajā gadījumā, kad signālu pirms diskretizācijas filtrē ar ideālu zemo frekvenču filtru, aproximācijas kļūdu atrod, integrējot ieejas signāla to spektra daļu, kas atrodas ārpus filtra caurlaides joslas [12]. Paplašinātajam modelim risinājums vairs nav tik vienkāršs – šajā gadījumā, lai noteiktu diskretizācijas soļa  $T$  ietekmi uz aproximācijas kļūdu, signālu telpas (1.23) vietā apskata tās mērogoto versiju

$$V_T(\varphi) = \left\{ s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_T(n) \varphi(t/T - n) \right\}. \quad (1.54)$$

Ņemot vērā, ka funkcijai  $\varphi(t)$  izpildās vienotā sadalījuma nosacījums (1.25), tad aproximācijas kļūdai  $\varepsilon(T) = \|s(t) - \hat{s}_T(t)\|$ , kur  $s(t) \in L_2$  un  $\hat{s}_T(t) \in V_T(\varphi)$ , samazinot  $T$ , būtu jāsamazinās.

Vispārīgā gadījumā, kas ietver visas trīs apskatītās pieejas, signālu  $\hat{s}_T(t)$  atbilstoši 1.2. attēlā parādītajai blokshēmai var izteikt:

$$\hat{s}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \tilde{\varphi}(\tau/T - n) d\tau/T \right)}_{c_T(n)} \varphi(t/T - n), \quad (1.55)$$

kur  $\tilde{\varphi}(t)$  ir priekšfiltra (analīzes filtra) impulsa reakcija. Saskaņā ar darbā [11] iegūto rezultātu

aproximācijas kļūdu  $\varepsilon(T)$  atkarībā no  $T$  nosaka izteiksme

$$\varepsilon(T) = \|s(t) - \hat{s}_T(t)\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\tilde{\varphi}, \varphi}(T\omega) |S(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} + \varepsilon_{\text{corr}}, \quad (1.56)$$

kur

$$E_{\tilde{\varphi}, \varphi}(\omega) = |1 - \tilde{\Phi}^*(\omega) \Phi(\omega)|^2 + |\tilde{\Phi}(\omega)|^2 \sum_{n \neq 0} |\Phi(\omega + 2\pi n)|^2, \quad (1.57)$$

un  $\varepsilon_{\text{corr}}$  ir konstante, kas vairumā gadījumos ir niecīga, salīdzinot ar pirmo saskaitāmo. No (1.56) seko, ja  $E_{\tilde{\varphi}, \varphi}(0) = 0$ , ko nodrošina vienotā sadalījuma nosacījums (1.25) [81], tad  $\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon(T) = 0$ .

Ja diskretizācijai izmanto 1.3.1. apakšnodaļā aprakstīto pieeju (diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu), tad  $\tilde{\varphi}(t)$  spektru  $\tilde{\Phi}(\omega)$  nosaka izteiksme (1.38), un (1.57) reducējas uz

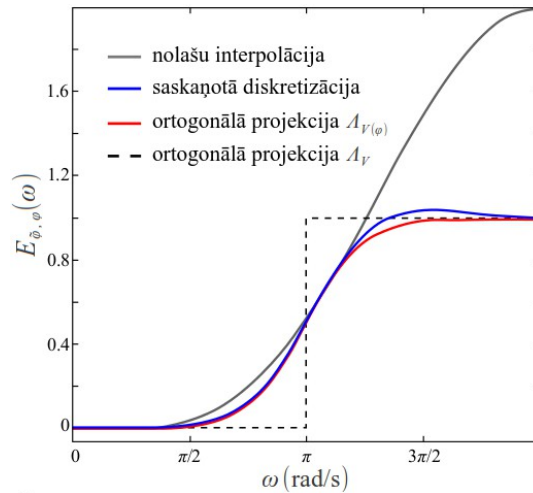
$$E_{\varphi}(\omega) = 1 - \frac{|\Phi(\omega)|^2}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\Phi(\omega + 2\pi n)|^2} = 1 - \frac{|\Phi(\omega)|^2}{A_{\varphi}(e^{j\omega})}. \quad (1.58)$$

Klasiskajā Šenona modeļa gadījumā, kad  $\varphi(t) = \text{sinc}(\pi t)$ , autokorelācijas spektrs  $A_{\text{sinc}}(e^{j\omega}) = 1$ , līdz ar to izteiksme

$$E_{\text{sinc}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ja } |\omega| \leq \pi \\ 1, & \text{ja } |\omega| > \pi \end{cases} \quad (1.59)$$

apstiprina faktu, ka aproximācijas kļūdu (1.56) nosaka tikai tā ieejas signāla spektra  $S(\omega)$  daļa, kas atrodas ārpus filtra caurlaides joslas.

Balstoties uz funkciju (1.57), var salīdzināt iepriekš apskatītās signālu aproximācijas pieejas – 1.7. attēlā parādītās nepārtrauktās līnijas atbilst gadījumam, kad  $\varphi(t) = \beta^1(t)$  [81].



1.7. att. Funkcijas  $E_{\tilde{\varphi}, \varphi}(\omega)$  (nepārtrauktās līnijas), ja  $\varphi(t) = \beta^1(t)$ , un  $E_{\text{sinc}}(\omega)$  (svītrlīnija) Nolašu interpolācijas gadījumā, ko attēlo pelēkā līnija, signālu  $s(t) \in L_2$  pirms diskretizācijas

nefiltrē, un atjaunotais signāls ir  $\hat{s}_{\text{int}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n) \beta^1(t-n)$ . Saskaņotās diskretizācijas gadījumā (zilā līnija) signālu pirms diskretizācijas filtrē ar nultās kārtas B-splainu filtru un iegūtās nolases kombinācijā ar ciparu korekcijas filtru izmanto signāla atjaunošanai saskaņā ar izteiksmi (1.48), ja  $\varphi_2(t) = \beta^1(t)$ . Ortogonālās projekcijas gadījumā  $A_{V(\varphi)}: L_2 \rightarrow V(\varphi)$  (sarkanā līnija) signālu pirms diskretizācijas filtrē ar funkcijai  $\varphi(t) = \beta^1(t)$  atbilstošo optimālo priekšfiltru (1.38), savukārt svītrlīnija atbilst Šenona modelim, kad signālu pirms diskretizācijas filtrē ar ideālu zemo frekvenču filtru.

No 1.7. attēla izriet, ka Šenona modelim vistuvāko rezultātu dod diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu, lai gan saskaņotā diskretizācija ar priekšfiltru  $\varphi_1(t) = \beta^0(t)$  dod līdzīgu rezultātu. Trešā pieeja ar nolašu interpolāciju dod vislielāko kļūdu, kam par iemeslu ir priekšfiltra neesamība un signālā ienestie frekvenču uzklāšanās kropļojumi, tāpēc svarīgi pirms signālu diskretizācijas ir vienmēr lietot atbilstošo analogo priekš-filtru.

## 1.4. Nolašu teorēmas variācijas un paplašinājumi

Literatūrā ir atrodamas nolašu teorēmas dažādas variācijas un paplašinājumi [13], [14], [39] – apskatīsim dažus no tiem.

**Krāmera vispārinātā nolašu teorēma.** Saskaņā ar Krāmera teorēmu [45] signālu

$$s(t) = \int_I S(x) K(x, t) dx, \quad (1.60)$$

kur  $I$  ir intervāls uz reālo skaitļu ass,  $S(x) \in L_2(I)$  un  $K(x, t) \in L_2(I)$  katram reālam  $t$ , pilnībā reprezentē nolases  $s(t_n)$  atbilstoši izteiksmei

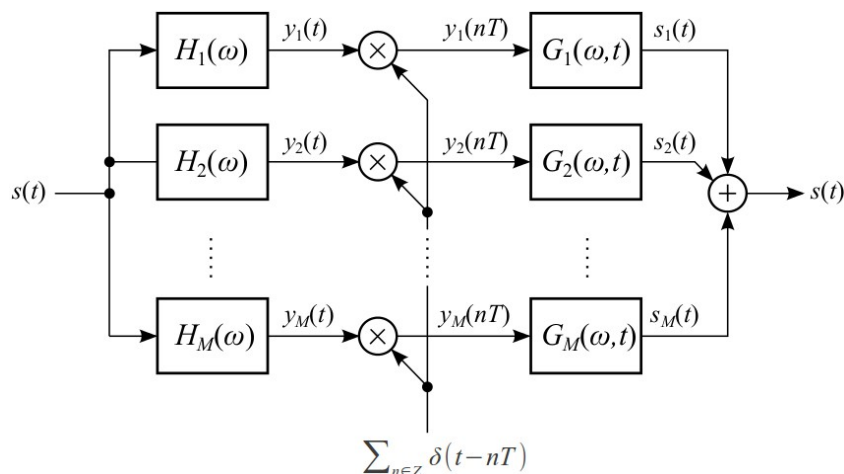
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) h_n(t), \quad (1.61)$$

kur

$$h_n(t) = \frac{\int_I K(x, t) K^*(x, t_n) dx}{\int_I |K(x, t_n)|^2 dx}, \quad (1.62)$$

ja vien laika momentu secībai  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  (kas var būt arī nevienmērīga) funkcijas  $\{K(x, t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  veido pilnu ortogonālu funkciju saimi. Speciālgadījumā, ja integrēšanas intervālu  $I$  izvēlas  $I = [-\pi/T, \pi/T]$ , funkciju  $K(x, t) = e^{jxt}$  un laika momentus  $t_n = nT$ , tad no (1.62) seko  $h_n(t) = \text{sinc}(\pi t/T - \pi n)$ , un no (1.61) – Šenona interpolācijas formula (1.1), kas ir spēkā visiem izteiksmes (1.60) signāliem, tātad frekvenču joslā  $I$  ierobežotiem signāliem. Vēl pāris piemērus var atrast darbā [38].

**Daudzkanālu diskretizācija.** Vēl vienu svarīgu nolašu teorēmas vispārinājumu 1977. gadā deva A.Papoulis [63]. Saskaņā ar to frekvenču joslā līdz  $F_{max}$  ierobežotu signālu  $s(t)$  precīzi var atjaunot no nolasēm, kas ņemtas  $M$  lineāru laika-invariantu sistēmu (kanālu) izejās ar diskretizācijas soli  $T = M/(2 F_{max})$  (1.8. attēls).



1.8. att. Daudzkanālu diskretizācijas blokshēma

Atjaunošanas formula:

$$s(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_m(nT) g_m(t-nT), \quad (1.63)$$

kur  $y_m(t)$  ir kanālu  $H_m(\omega)$  izejas signāli

$$y_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega) H_m(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \Omega = 2\pi F_{max}, \quad (1.64)$$

un

$$g_m(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\Omega}^{-\Omega+\sigma} G_m(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega, \quad \sigma = 2\Omega/M, \quad (1.65)$$

bet funkcijas  $G_m(\omega, t)$  atrod no vienādojumu sistēmas

$$\begin{bmatrix} H_1(\omega) & \cdots & H_M(\omega) \\ H_1(\omega + \sigma) & \cdots & H_M(\omega + \sigma) \\ \vdots & & \vdots \\ H_1(\omega + (M-1)\sigma) & \cdots & H_M(\omega + (M-1)\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(\omega, t) \\ G_2(\omega, t) \\ \vdots \\ G_M(\omega, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\sigma t} \\ \vdots \\ e^{j(M-1)\sigma t} \end{bmatrix}, \quad (1.66)$$

kur  $t$  ir jebkurš skaitlis un  $\omega \in (-\Omega, -\Omega + \sigma)$ . No (1.66) izriet, ka funkcijām  $H_m(\omega)$  jābūt tādām, lai sistēmas determinants jebkurai  $\omega$  vērtībai intervālā  $(-\Omega, -\Omega + \sigma)$  būtu atšķirīgs no nulles.

Ja sistēmu veido tikai viens kanāls ar funkciju  $H_1(\omega)=1$ , tad  $s(t)$  reprezentācijai iegūst klasisko interpolācijas formulu (1.1). Ja pārvades funkcijas  $H_m(\omega)$  izvēlas  $H_m(\omega)=(j\omega)^{m-1}$ , tad  $s(t)$  var izteikt ar  $M$  signālu  $y_m(t)=s^{(m-1)}(t)$  nolasēm  $y_m(nT)$ , kas

ņemtas ar soli  $T = M/(2F_{max})$ . Kā piemēru šim gadījumam var apskatīt divu kanālu sistēmu ar funkcijām  $H_1(\omega) = 1$  un  $H_2(\omega) = j\omega$ . Diskretizācijas solis ir  $T = 1/F_{max} = 2\pi/\Omega$ , parametrs  $\sigma = \Omega$ , un kanālu izejas signāli ir  $y_1 = s(t)$  un  $y_2 = s'(t)$ . No (1.66) izriet

$$\begin{bmatrix} 1 & j\omega \\ 1 & j(\omega + \Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1(\omega, t) \\ G_2(\omega, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\Omega t} \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$

ku atrisinot iegūst

$$G_1(\omega, t) = 1 - \frac{\omega}{\Omega}(e^{j\Omega t} - 1) \text{ un } G_2(\omega, t) = \frac{1}{j\Omega}(e^{j\Omega t} - 1). \quad (1.68)$$

Liekot šīs funkcijas izteiksmē (1.65), atrod

$$g_1(t) = \text{sinc}^2(\Omega t/2) \text{ un } g_2(t) = t \text{sinc}^2(\Omega t/2), \quad (1.69)$$

līdz ar to signālu  $s(t)$  var izteikt

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \text{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2}(t-nT)\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} s'(nT)(t-nT) \text{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2}(t-nT)\right). \quad (1.70)$$

Daudzkanālu sistēmu līdzīgi kā klasisko Šenona modeli var vispārināt visiem telpas  $s(t) \in L_2$  signāliem [85]. Piemērus sistēmas pielietojumiem var atrast darbos [6], [86].

**Signālu dekompozīcija ar vilnīšu (wavelet) funkcijām.** Izmantojot noteiktas sintēzes un analīzes vilnīšu funkcijas  $\tilde{\psi}(t)$  un  $\psi(t)$ , kurām izpildās savstarpējā ortogonalitāte  $\langle \tilde{\psi}_{n,l}, \psi_{k,i} \rangle = \delta_{n-k, l-i}$ , signālus  $s(t) \in L_2$  var izteikt ar lineāru kombināciju

$$s(t) = \sum_{n \in Z} \sum_{l \in Z} \langle s, \tilde{\psi}_{n,l} \rangle \psi_{n,l}, \quad (1.71)$$

kur indeksi  $n$  un  $l$  apzīmē funkciju aizturi (pozīciju uz laika ass) un mērogu [20], [55], [57]:

$$\psi_{n,l}(t) = 2^{-l/2} \psi(2^{-l}t - n). \quad (1.72)$$

Izteiksme (1.71) ir līdzīga (1.28), tikai šajā gadījumā summētas tiek ne tikai laikā nobīdītas, bet arī dažāda mēroga funkcijas.

**Nevienmērīgā diskretizācija.** Vienmērīgo diskretizāciju var uzskatīt par nevienmērīgās diskretizācijas speciālgadījumu, kad signāla mērījumus (nolases) ņem laika momentos  $t_n = nT$ ,  $n \in Z$ . Nevienmērīgās diskretizācijas gadījumā attālumi  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  starp mērījumiem var būt dažādi, un signālu atjaunošanu var balstīt uz divām pieejām – koeficientu  $c_n$  noteikšanu izvēlētajam modelim (1.23) atbilstoši dotajiem mērījumiem, vai arī jaunu bāzes funkciju (vai telpu) definēšanu, kas ir labāk piemērotas konkrētajai atjaunošanas problēmai [24], [28], [34], [47], [60], [70]. Atsevišķi var atzīmēt tādu funkciju pielietojumu, kas ir ierobežotas laika apgabalā un vienlaikus maksimāli kompakts frekvenču apgabalā [71]. Tās ir izstieptās sferoidālās viļņu funkcijas, kuru sīkāks apraksts dots 3. pielikumā.

Pie nevienmērīgās diskretizācijas saistībā ar signālu atjaunošanu no līmeņu-

šķērsojumu nolasēm atgriezīsimies vēl 4. nodaļā.

## 1.5. Kopsavilkums

Nodaļas sākumā tika dota klasiskā nolašu teorēma, kurai būtiska nozīme ir mūsdienu signālapstrādē – tā pasaka, kā analogo signālu pārvērst skaitļu virknē, kuru tālāk jau var apstrādāt ciparu veidā.

Pēc tam tika parādīts, ka frekvenču joslā neierobežotu signālu filtrācija ar ideālu zemo frekvenču filtru dod izejas signālu, kas ir ieejas signāla aproksimācija (ortogonālā projekcija) ar minimālu kvadrātisko kļūdu frekvenču joslā ierobežotu signālu telpā.

Saistībā ar Šenona rezultāta praktisko pielietojumu ir jāatzīmē arī dažas problēmas. Pirmkārt, tā ir idealizācija – reāli signāli nav frekvenču joslā ierobežoti [73]. Otrkārt, neeksistē ideāls zemo frekvenču filtrs, un, treškārt, Šenona atjaunošanas formulu reti izmanto praksē, kam par iemeslu ir *sinc* funkcijas lēnā rimšana [64]. Tāpēc nodaļā tika apskatīts arī Šenona modeļa paplašinājums telpas  $L_2$  signāliem, definējot aproksimācijas telpu  $V(\varphi)$ , kas attiecīgi ļauj izmantot daudz vienkāršākas funkcijas  $\varphi(t)$ . Atkarībā no uzdevuma nostādnes tika parādītas trīs pieejas – diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu, saskaņotā diskretizācija un nolašu interpolācija. Kā tālāk izrietēja no kļūdu analīzes, tad mazāko aproksimācijas kļūdu dod diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu, bet lielāko – nolašu interpolācija, kam par iemeslu ir priekšfiltra neesamība, kas attiecīgi rada frekvenču uzklāšanās kropļojumus.

Nodaļas beigās tika doti arī divi svarīgākie nolašu teorēmas vispārinājumi, no kuriem kā speciālgadījumi izriet daudzi citi nolašu teorēmas paplašinājumi.

## 2. KLASISKĀS SIGNĀLAPSTRĀDES UZLABOJUMI

Pirmajā nodaļā apskatītā signālu diskretizācija balstījās uz Naikvista kritērija (1.13) ievērošanu attiecībā uz signāla frekvenču joslu – jo lielāka tā ir, jo lielāka diskretizācijas frekvence ir nepieciešama. Tomēr ir aplikācijas, kurās šāds datu ieguves paņēmiens nav efektīvs vai ir grūti realizējams pārāk augstās signālu frekvences dēļ, tāpēc šajā nodaļā tiks apskatītas vairākas signālapstrādes pieejas, kas ņem vērā nevis kopējo aizņemto signāla frekvenču joslu, bet gan tā parametru skaitu, kas pilnībā raksturo šo signālu. Nodaļas beigās tiks arī apskatīta signālu laika kodēšana, kas ir analogo signālu reprezentācija ar diskrēta laika secībām.

### 2.1. Ciparu signālu apstrāde bez frekvenču uzklāšanās kropļojumiem

Ciparu signālu apstrāde bez frekvenču uzklāšanās kropļojumiem (Digital Alias-free Signal Processing: DASP) ir signālapstrādes pieeja, kas balstās uz signāla vērtību fiksāciju nevienmērīgi izvietotos laika momentos, kā arī to pielīdzināšanu nevienmērīgi izvietotiem kvantēšanas līmeņiem [9]. Tas ļauj izvairīties no ciparu formā pierakstītā signāla spektra periodiskuma un ļauj apstrādāt signālus diskrētā formā daudz plašākā frekvenču diapazonā, nekā to pieļauj tradicionālā signālu ciparapstrāde. To attiecībā uz nevienmērīgo diskretizāciju uzskatāmi parāda tālāk sekojošais piemērs.

Diskrēta signāla attēlojumu frekvenču apgabalā var atrast ar Diskrēto Furjē Transformāciju (DFT):

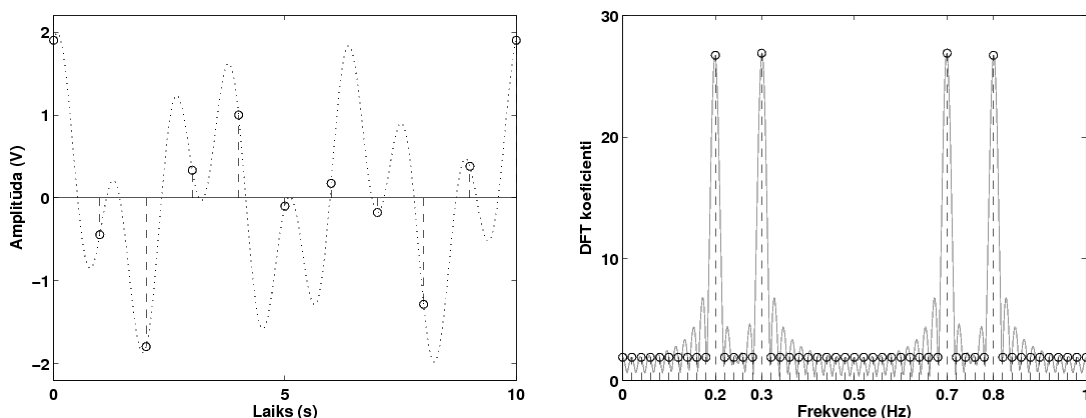
$$S_m = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j2\pi nm/N}, \quad (2.1)$$

kur  $s_n = s(nT)$  ir vienmērīgi diskretizēta signāla nolases,  $N$  ir nolašu skaits, un  $S_m$  ir DFT koeficienti frekvencēm

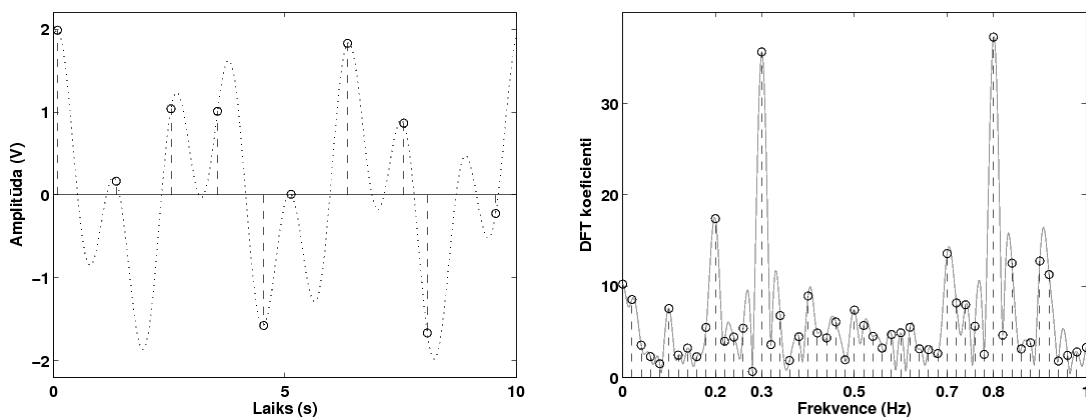
$$f_m = f_d m/N, \quad (2.2)$$

kur  $f_d = 1/T$  ir signāla diskretizācijas frekvence un  $m = 0, 1, \dots, N-1$ . Ja  $s(t)$  satur frekvences, kas pārsniedz  $f_d/2$ , tad tā periodizētais spektrs pārklājas. Piemērs tam parādīts 2.1. attēlā, kurā divu harmoniku (0.3 un 0.8 Hz) signāls diskretizēts vienmērīgi ar frekvenci  $f_d = 1$  Hz. Rezultātā signāla DFT spektrā frekvenču joslā līdz  $f_d/2$  parādās 0.2 un 0.3 Hz harmonikas, no kurām pirmā atbilst patiesās 0.8 Hz harmonikas spoguļattēlam – tāpat šajā

gadījumā, nezinot, kāda ir signāla maksimālā frekvence, nav īsti skaidrs, kuras no četrām 0.2, 0.3, 0.7 un 0.8 Hz harmonikām signāls satur.



### 2.1. Vienmērīgi diskretizēts signāls un tā DFT spektrs



### 2.2. att. Nevienmērīgi diskretizēts signāls un tā DFT spektrs

Lai situāciju mainītu, vienmērīgo diskretizāciju aizstāj ar gadījuma nevienmērīgu diskretizāciju (2.2. attēls), nolašu  $s(t_n)$  laika momentus izvēloties atbilstoši izteiksmei  $t_n = n + 0.65\tau_n$ , kur  $\tau_n$  ir gadījuma skaitlis intervālā  $\tau_n \in [0,1]$ . Rezultātā signāla vidējā diskretizācijas frekvence sakrīt ar  $f_d = 1$  Hz, un iegūtais DFT spektrs atbilst 2.2. attēlam pa kreisi. Signāla DFT spektru šajā gadījumā atrod ar vispārināto DFT izteiksmi [33]

$$S_m = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) e^{-j2\pi t_n m / \Theta}, \quad (2.3)$$

kur  $\Theta$  ir signāla garums,  $S_m$  ir spektra koeficienti frekvencēm

$$f_m = m / \Theta, \quad (2.4)$$

$m = 0, 1, \dots, M-1$ , un  $M$  nosaka maksimālo frekvenci, līdz kurai spektrs tiek rēķināts. Lai arī eksponentfunkcijas izteiksmē (2.3) neveido ortogonālu funkciju bāzi un iegūtais rezultāts neatbilst patiesajam signāla spektram, priekšstats par signālu saturošajām komponentēm kļūst skaidrāks – no 2.2. attēla izriet, ka divas jaudīgākās komponentes atbilst patiesajam signāla

0.3 un 0.8 Hz frekvencēm, bet 0.2 un 0.7 Hz harmonikas, kas 2.1. attēlā radušās periodizētā spektra pārklāšanās rezultātā, ir pavājinājušās. Šo īpašību, kad nevienmērīgās diskretizācijas rezultātā vājinās uzklājošos komponentu jauda, izmanto signālu diskreto harmoniku noteikšanai ar komponentu secīgas izvilkšanas metodi SECOEX (SEquential COmponent Extraction) [61].

### 2.1.1. Pseudogadījum-diskretizācija

DASP teorijas un pielietojumu attīstība ir balstījusies uz pieeju, ka signāls tiek diskretizēts nevienmērīgos, bet iepriekš zināmos, pēc noteikta algoritma uzdotos laika momentos. Tā kā iespējami ir dažādi diskretizācijas paņēmieni [10], tad to izvēli var balstīt uz to realizācijas un turpmāko aprēķinu sarežģītības pakāpi. Apskatīsim sekojošo piemēru.

Pieņemsim, ka frekvenču joslā līdz  $F_{max}/2$  ierobežotu analogo signālu diskretizē vienmērīgi ar diskretizācijas frekvenci  $F_{max}$ . Nolašu laika momenti ir  $t_k = k/F_{max} = kT$ ,  $k=0, 1, \dots, K-1$ , un signāla garums ir  $\Theta = KT$ . Ja šo signālu vēlamies diskretizēt nevienmērīgi ar samazinātu vidējo diskretizācijas frekvenci  $\bar{f} = F_{max}/M$ , kur  $M > 1$  ir vesels skaitlis, tad izdevīgi nolašu laika momentus  $t_n$  ņemt no kopas  $\{t_k\}_{k=0,1,\dots,K-1}$  elementiem, piemēram, saskaņā ar izteiksmi

$$t_n = n\bar{T} + a_n T, \quad (2.5)$$

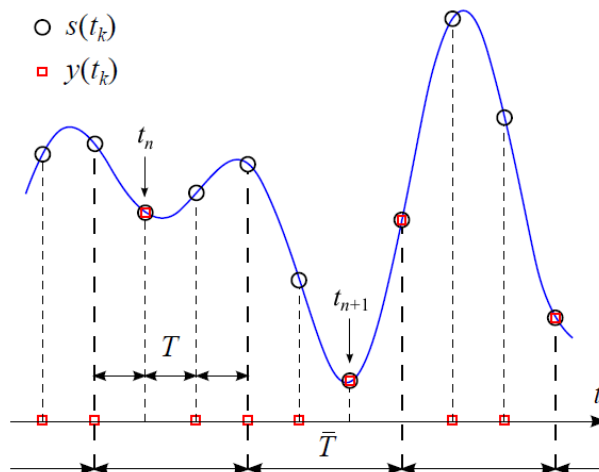
kur  $\bar{T} = 1/\bar{f} = MT$  un  $a_n$  – pseudogadījumskaitlis no veselo skaitļu kopas  $[0, M-1]$  (diskretizācijas piemērs, ja  $M=3$ , parādīts 2.3. attēlā). Tātad  $\{t_n\}_{n=0,1,\dots,N-1}$ , kur  $N < K$ , būs kopas  $\{t_k\}_{k=0,1,\dots,K-1}$  apakškopa. Izdevīgi tas ir tāpēc, ka nevienmērīgi diskretizētā signāla spektra novērtējumu saskaņā ar (2.3) šajā gadījumā var aprēķināt ar klasisko DFT izteiksmi:

$$S_m = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) e^{-j2\pi t_n m / \Theta} = \sum_{k=0}^{K-1} y(t_k) e^{-j2\pi t_k m / \Theta} = \sum_{k=0}^{K-1} y(t_k) e^{-j2\pi k m / K}, \quad (2.6)$$

kur  $m=0, 1, \dots, K-1$  un

$$y(t_k) = \begin{cases} s(t_k), & \text{ja } t_k \in \{t_n\} \\ 0, & \text{ja } t_k \notin \{t_n\}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Tā kā (2.6) dod DFT spektru ar nullēm pildītam signālam  $y(t_k)$  (2.3. attēls), tad iegūtais rezultāts atšķirsies no patiesā  $s(t_k)$  spektra, kura precizēšanai tālāk jau var izmantot SECOEX metodi, kas apskatīta nākamajā apakšnodaļā.



2.3. att. Signāla  $s(t_k)$  ar nullēm pildītais signāls  $y(t_k)$

### 2.1.2. Komponenšu secīga izvilšana

Komponenšu secīgas izvilšanas metodi SECOEX var pielietot spektrālo komponenšu parametru noteikšanai signālam, kas sastāv no vienas vai vairākām harmonikām:

$$s(t) = \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi f_m t + \varphi_m). \quad (2.8)$$

Zinot nolašu  $\{s(t_n)\} = \{s_n\}_{n=0,1,\dots,N-1}$  un laika momentu  $\{t_n\}$  vērtības, uzdevums ir atrast harmoniku amplitūdas  $A_m$ , frekvences  $f_m$  un sākumfāzes  $\varphi_m$ .

SECOEX pamatā ir iteratīvs algoritms [61], kura katrā iterācijā tiek atrasta viena harmonika:

$$\begin{aligned} \{s_{1,n}\} &= \{s_n\}; \\ \sum_{n=0}^{N-1} (s_{i,n} - A_i \sin(2\pi f_i t_n + \varphi_i))^2 &= \min; \\ \{s_{i+1,n}\} &= \{s_{i,n} - A_i \sin(2\pi f_i t_n + \varphi_i)\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

kur  $i > 0$  apzīmē iterācijas numuru,  $\{s_{i,n}\}$  ir signāla nolases iterācijā  $i$ , un  $A_i \sin(2\pi f_i t + \varphi_i)$  – meklējamā harmonika, kuras parametrus  $A_i$ ,  $f_i$  un  $\varphi_i$  nosaka, risinot minimizācijas uzdevumu. Ja šie parametri ir atrasti pareizi, tad pēc harmonikas atņemšanas atlikušais signāls to vairs nesatur. Rezultātā signāla enerģija, iterāciju skaitam pieaugot, samazinās, un algoritma izpildi pārtrauc, ja signāla enerģija kļūst pietiekami maza vai tiek atrasts noteikts harmoniku skaits.

Lai uzlabotu SECOEX metodes precizitāti, kas lielā mērā atkarīga no harmoniku frekvenču  $f_m$  noteikšanas precizitātes, iteratīvo algoritmu (2.9) papildina ar vēl vienu rindu [VIII ]:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( s_n - \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi f_m t_n + \varphi_m) \right)^2 = \min, \quad (2.10)$$

lai ar mazāko kvadrātu metodi atrastu iepriekš uzdoto frekvenču  $\{f_m\}_{m=1,2,\dots,M}$  harmoniku amplitūdas  $\{A_m\}$  un sākumfāzes  $\{\varphi_m\}$ . Kombinēto pieeju šajā gadījumā, sākot ar nolasēm  $\{s_{1,n}\} = \{s_n\}$ , var rakstīt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} (s_{i,n} - A_i \sin(2\pi f_i t_n + \varphi_i))^2 &= \min; \\ \sum_{n=0}^{N-1} \left( s_n - \sum_{l=1}^i A_l \sin(2\pi f_l t_n + \varphi_l) \right)^2 &= \min; \\ \{s_{i+1,n}\} &= \{s_{1,n} - \sum_{l=1}^i A_l \sin(2\pi f_l t_n + \varphi_l)\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kur pirmais solis ir signāla jaudīgākās harmonikas frekvences  $f_i$  noteikšana – šim nolūkam var izmantot DFT izteiksmi (2.6), otrais solis ietver amplitūdu  $\{A_l\}$  un sākumfāžu  $\{\varphi_l\}$ , kas atbilst iepriekš atrastajām frekvencēm  $\{f_l\}_{l=1,2,\dots,i}$ , aprēķinu, bet trešajā solī visas  $i$  komponentes tiek atņemtas no sākotnējā signāla. Rezultātā katrā iterācijā tiek pārrēķinātas  $\{A_l\}$  un  $\{\varphi_l\}$  vērtības, ņemot vērā visas iepriekš atrastās  $f_1, f_2, \dots, f_{i-1}$  un jauno frekvenci  $f_i$ . Tas ļauj precīzāk noteikt harmoniku parametrus, iterāciju skaitam pieaugot.

### 2.1.3. DASP pielietojums

DASP pieeju var izmantot augstfrekvences signālu ciparapstrādei ar salīdzinoši zemāku frekvenci nekā to pieprasa klasiskā nolašu teorēma, ko demonstrējusi arī Elektronikas un datorzinātņu institūtā izstrādātā DASP-Lab sistēma [94], kas 1.2 GHz diapazona signālu spēj apstrādāt ar 80 MHz vidējo diskretizācijas frekvenci, tādējādi 30 reizes pārsniedzot klasiski pieļaujamo frekvenču joslu. Šāda apstrāde ir iespējama, ja vien signāla no nulles atšķirīgo spektra daļu frekvenču joslu summārā josla nepārsniedz pusi no vidējās diskretizācijas frekvences.

## 2.2. Kompresīvā detektēšana

Saskaņā ar klasisko apstrādi signālu diskretizācijas frekvencei jābūt vismaz divas reizes lielākai par signāla frekvenču joslas platumu, kas daudzos pielietojumos (piemēram,

ciparu attēlu un video kamerās) dod pārlietu lielu nolašu skaitu un rada nepieciešamību pēc datu kompresijas, kā arī sadārdzina iekārtu (attēlveidošanas sistēmas medicīnā, ātrdarbīgie ACP) izgatavošanas izmaksas pārāk augstās diskretizācijas frekvences dēļ.

Šo trūkumu novēršanai ir attīstīta jauna signālapstrādes pieeja – kompresīvā detektēšana (Compressive sensing: CS), kas pamatojas uz faktu, ka daudzus signālus var izteikt ar nelielu no nulles atšķirīgu koeficientu skaitu noteiktā funkciju bāzē, kas attiecīgi ļauj šos signālus pilnībā reprezentēt ar nelielu to mērījumu skaitu [15], [25].

Minimālais nolašu (mērījumu) skaits CS gadījumā ir vairāk atkarīgs nevis no signāla frekvenču joslas platuma, bet gan no tā, cik “retināts” (*sparse*) tas ir. Pieņemsim, ir dots reāls signāls  $s(t)$ , kuru var izvērst ortonormālu funkciju bāzē  $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ :

$$s(t) = \sum_{n=1}^N c_n \psi_n(t), \quad (2.12)$$

kur  $c_n = \langle s, \psi_n \rangle$ . Laika momentos  $t_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ , signāla vērtības būs:

$$s(t_k) = \sum_{n=1}^N c_n \psi_n(t_k). \quad (2.13)$$

Rakstot (2.13) matricu formā un pieņemot  $K=N$ , iegūst

$$\mathbf{s} = \mathbf{\Psi} \mathbf{c}, \quad (2.14)$$

kur  $\mathbf{s} = [s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_N)]^T$ ,  $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$  un  $\mathbf{\Psi}$  ir  $N \times N$  transformācijas matrica ar elementiem  $\Psi_{k,n} = \psi_n(t_k)$ . Vektori  $\mathbf{s}$  un  $\mathbf{c}$  ir ekvivalentas  $s(t)$  reprezentācijas, tikai  $\mathbf{s}$  signālu attēlo laika apgabalā, bet  $\mathbf{c}$  – funkciju bāzē  $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots,N}$ . Ja koeficientu vektoram  $\mathbf{c}$  no nulles atšķiras tikai  $M$  elementi, tad dotais signāls  $\mathbf{s}$  ir  $M$  bāzes funkciju lineāra kombinācija un to sauc par  $M$ -retinātu. Savukārt ja attēlojuma vektorā  $\mathbf{c}$  tikai dažiem koeficientiem ir lielas vērtības, bet pārējie ir salīdzinoši mazi, tad signālu  $\mathbf{s}$  sauc par saspiežamu – mazos koeficientus aizvieto ar nullēm, bet lielos atstājot, atjaunotais signāls tikai nedaudz atšķirsies no oriģinālā.

Ņemot vērā, ka saspiežami signāli ir labi aproksimējami ar  $M$ -retinātu attēlojumu, izveidota ir transformācijas kodēšana [56], kurai liela nozīme ir datu ieguves sistēmās, piemēram, ciparu kamerās. Sākumā tiek iegūts  $N$  nolašu signāls  $\mathbf{s}$ , no kura aprēķina transformācijas koeficientus  $\mathbf{c} = \mathbf{\Psi} \mathbf{s}$ , un tālāk atrod  $M$  lielākos koeficientus, kuru vērtības un pozīcijas kodē, bet pārējos  $N-M$  koeficientus atmet. Šādai signālapstrādes pieejai – diskretizācija un tad kodēšana, piemīt trīs neefektivitātes:

- 1) sākotnējais nolašu skaits  $N$  var būt ļoti liels, pat ja  $M$  ir mazs;
- 2) neskatoties uz to, ka beigās tiek atstāti tikai  $M$  transformācijas koeficienti, sākumā tiek

aprēķināti visi  $N$  koeficienti;

- 3) kodētas tiek ne tikai atstāto koeficientu vērtības, bet arī to izvietojums, tādējādi palielinās kopējais informācijas daudzums.

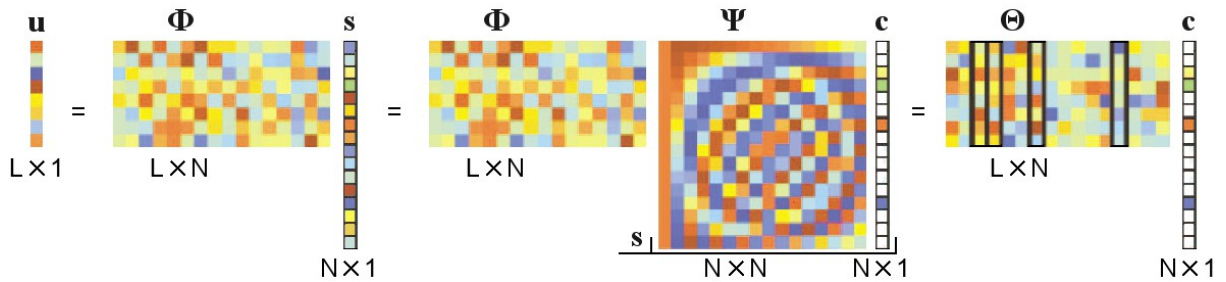
Kompresīvā detektēšana šīs neefektivitātes novērš, balstoties uz tiešu signāla attēlojuma iegūšanu [15], [25]. Mērījumus  $u_l$  šajā gadījumā iegūst ar skalāriem reizinājumiem  $u_l = \langle \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}_l \rangle = \boldsymbol{\varphi}_l^T \mathbf{s}$  starp signālu  $\mathbf{s}$  un vektoriem  $\{\boldsymbol{\varphi}_l\}_{l=1,2,\dots,L}$ , kur  $L < N$ . Liekot šos vektorus  $L \times N$  matricā  $\Phi$ , kuras rindas  $l$  elementus veido transponētais vektors  $\boldsymbol{\varphi}_l^T$ , iegūst

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{s}. \quad (2.15)$$

Savukārt no (2.14) un (2.15) izriet

$$\mathbf{u} = \Phi \Psi \mathbf{c} = \Theta \mathbf{c}, \quad (2.16)$$

kur  $\Theta = \Phi \Psi$  ir  $L \times N$  matrica (2.4. attēlā parādītajā piemērā  $\Phi$  ir gadījuma Gausa mērīšanas matrica,  $\Psi$  ir diskrētā kosinusa transformācijas matrica, kas dod  $M=4$  no nulles atšķirīgus vektora  $\mathbf{c}$  koeficientus, un  $\mathbf{u}$  ir iegūto mērījumu vektors, ko veido matricas  $\Theta = \Phi \Psi$  četru iezīmēto kolonnu lineāra kombinācija).



2.4. att. Signāla CS mērījumu iegūšana ar gadījuma Gausa matricu  $\Phi$

Mērījumu process nav adaptīvs, jo  $\Phi$  ir noteikts un nav atkarīgs no signāla  $\mathbf{s}$ . Uzdevums ir atrast stabilu mērīšanas matricu  $\Phi$  tā, lai nezustu nozīmīga informācija par jebkuru  $M$ -retinātu vai saspiežamu signālu, samazinot tā dimensiju no  $N$  (vektors  $\mathbf{s}$ ) uz  $L$  (vektors  $\mathbf{u}$ ), kā arī uzdevums ir atrast algoritmu signāla  $\mathbf{s}$  atjaunošanai no  $L \approx M$  mērījumiem  $\mathbf{u}$ . Tā kā  $L < N$ , tad sistēma (2.15) ir nenoteikta, un tai eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu, bet, ja ņem vērā, ka signāls ir  $M$ -retināts, tad (2.15) ekvivalento sistēmu (2.16) var atrisināt, ja  $L \geq M$ . Nepieciešamais un pietiekamais nosacījums šajā gadījumā ir – matricai  $\Theta$  piemīt ierobežotās izometrijas īpašība [16], t.i., jebkurai  $M$ -retinātam vektoram  $\mathbf{v}$  izpildās nevienādība

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\|\Theta \mathbf{v}\|_2^2}{\|\mathbf{v}\|_2^2} \leq 1 + \varepsilon, \quad (2.17)$$

kur  $\varepsilon \in (0,1)$  un  $\|\mathbf{v}\|_2 = (\sum_n |v_n|^2)^{1/2}$ . Ar to ir arī saistīts nesaskaņotības nosacījums, kas pieprasa, lai matricas  $\Psi$  kolonnas nebūtu iespējams retināti attēlot ar matricas  $\Phi$  rindām, un

otrādi.

Kā izrādās, tad izometrijas īpašību un nesaskaņotības nosacījumu neatkarīgi no transformācijas matricas  $\Psi$  ar lielu varbūtību var sasniegt, izmantojot gadījuma matricu  $\Phi$ , kuras elementi, piemēram, ir Gausa sadalījuma gadījumlielumi ar nulles vidējo vērtību un dispersiju  $1/L$  [4]. Signālu  $s$  šajā gadījumā ar lielu varbūtību var atjaunot no vektora  $\mathbf{u}$ , kas satur  $L$  mērījumus, ja

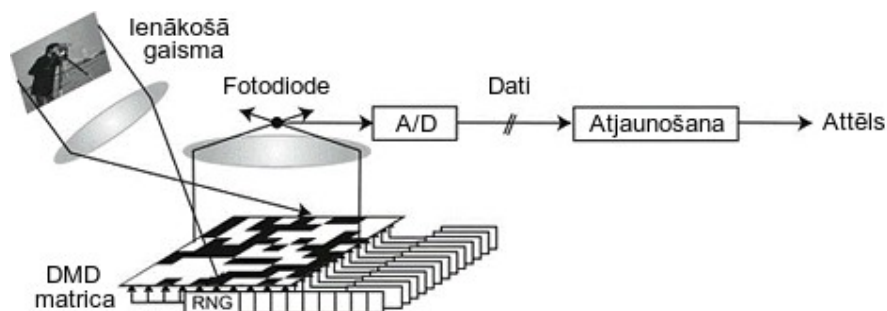
$$L \geq aM \log(N/M) \ll N, \quad (2.18)$$

kur  $a = 1/\varepsilon^2$  ir maza konstante [4]. Tā kā  $L < N$ , tad vienādojumu sistēma (2.16) dos bezgalīgi daudz atrisinājumu  $\hat{\mathbf{c}}$ , kuriem  $\mathbf{u} = \Theta \hat{\mathbf{c}}$ , tāpēc, lai nonāktu pie pareizā risinājuma, vektoram  $\hat{\mathbf{c}}$  var uzlikt vienu no papildus nosacījumiem:

- 1) summa  $\sum_{n=1}^N |\hat{c}_n|^2$  ir minimāla (vektora  $\hat{\mathbf{c}}$  enerģija ir minimāla);
- 2) summa  $\sum_{n=1}^N |\hat{c}_n|^0$  ir minimāla (vektora  $\hat{\mathbf{c}}$  no nulles atšķirīgo elementu skaits ir minimāls);
- 3) summa  $\sum_{n=1}^N |\hat{c}_n|$  ir minimāla.

Ja izvēlas pirmo nosacījumu, tad iegūtais risinājums  $\hat{\mathbf{c}} = \Theta^T (\Theta \Theta^T)^{-1} \mathbf{u}$  praktiski nekad nebūs  $M$ -retināts, jo saturēs daudzus no nulles atšķirīgus elementus. Ja izvēlas otro nosacījumu, tad  $M$ -retinātu signālu ar lielu varbūtību var atjaunot no  $L = M + 1$  mērījumiem [5], tomēr šāds risinājums ir skaitliski nestabils un prasa ilgu aprēķinu laiku. Vispiemērotākais izrādās ir trešais nosacījums, kas precīzi ļauj atjaunot  $M$ -retinātu signālu un tuvināti aproksimēt saspiežamu signālu no  $L \geq aM \log(N/M)$  ar Gausa matricu iegūtiem mērījumiem. Atjaunošanas dažādos algoritmus var atrast darbos [15], [25], [26], [30].

**CS pielietojums.** CS pieeju var izmantot gan datu ieguvei, gan apstrādei [26]. Viens no piemēriem ir viena pikseļa kamera (2.5. attēls).



2.5. att. CS viena pikseļa kamera [79]

Klasiskajā ciparu kamerā gaisma, kas nāk no objekta, caur lēcu tiek fokusēta uz sensoru matricu, kuras sensoru skaits nosaka kameras izšķirtspēju. Uz CS pieeju balstītajā

viena pikseļa kamerā sensoru matricas vietā tiek lietots mikrospoguļu masīvs (DMD matrica), kas sastāv no  $N$  regulējamiem mikroskopiskiem spoguļiem, kuru orientāciju maina “ieslēgtā” vai “izslēgtā” stāvoklī [79]. Ieslēgtā stāvoklī spogulis no objekta nākošo gaismu atstaro uz sekundāro lēcu, kas šo gaismu fokusē uz sensoru. Visu spoguļu orientāciju nosaka gadījumskaitļu ģeneratora (RNG) dotais gadījuma paraugs  $\Phi_l$ , un katrs atsevišķais paraugs rada spriegumu uz fotodiodei (vienu pikseli), kas atbilst vienam mērījumam  $u_l$ . Atkārtojot procesu  $L$  reizes, iegūst mērījumu vektoru  $\mathbf{u}$ , kuru tālāk sūtot signālapstrādes blokam, tiek veikta attēla rekonstrukcija.

### 2.3. Signāli ar galīgu inovāciju skaitli un to apstrāde

Signāla inovāciju skaitlis  $\rho$  ir parametru (brīvības pakāpju) skaits, kas raksturo šo signālu [88]. Tas rāda, cik nolases (mērījumi) vienā laika vienībā būtu jāņem, lai signāls būtu precīzi atjaunojams. Dosim dažus piemērus:

- 1) frekvenču joslā līdz  $F_{max}$  ierobežotu signālu pilnībā reprezentē nolases, kas ņemtas vienmērīgi ar diskretizācijas frekvenci  $2F_{max}$ , līdz ar to signāla inovāciju skaitlis ir  $\rho = 2F_{max}$ ;
- 2) ja signālu  $s(t)$  apraksta izteiksme

$$s(t) = \sum_{n \in Z} c_n \varphi\left(\frac{t - nT}{T}\right), \quad (2.19)$$

kur  $\varphi(t)$  ir zināma funkcija, tad signāla inovāciju skaitlis ir  $\rho = 1/T$ , kas atbilst koeficientu  $c_n$  skaitam vienā laika vienībā;

- 3) ja laika nobīdes izteiksmē (2.19) ir nevienmērīgas, tad signāla

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi\left(\frac{t - t_n}{T}\right) \quad (2.20)$$

brīvības pakāpes veido laika momenti  $t_n$  un koeficienti  $c_n$ ;

- 4) ja dota funkciju kopa  $\{\varphi_l(t)\}_{l=1,2,\dots,L}$  un patvaļīgas aiztures  $t_n$ , tad signāla

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^L c_{nl} \varphi_l\left(\frac{t - t_n}{T}\right) \quad (2.21)$$

brīvības pakāpes ir laika momenti  $t_n$  un koeficienti  $c_{nl}$ .

Ieviešot funkciju  $C_s(t_a, t_b)$ , kas skaita signāla  $s(t)$  brīvības pakāpes laika intervālā  $[t_a, t_b]$ , inovāciju skaitli  $\rho$  definē izteiksme

$$\rho = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} C_s\left(-\frac{\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2}\right). \quad (2.22)$$

Attiecīgi signālu, kura reprezentāciju nosaka izteiksmes (2.20) un (2.21), un kura inovāciju skaitlis (2.22) ir galīgs, sauc par signālu ar galīgu inovāciju skaitli [88]. Definēt var arī lokālo inovāciju skaitli loga garumā  $\Theta$ :

$$\rho_{\Theta}(t) = \frac{1}{\Theta} C_s\left(t - \frac{\Theta}{2}, t + \frac{\Theta}{2}\right). \quad (2.23)$$

Galīga garuma vai periodiskam signālam ar garumu (periodu)  $\Theta$  brīvības pakāpju skaits ir galīgs un vienāds ar  $C_s(0, \Theta)/\Theta$ .

### 2.3.1. Diraka impulsu virknes

Periodiskus signālus ar periodu  $\Theta$  var izteikt ar kompleksu eksponentfunkciju Furjē rindu

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n) e^{jn \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (2.24)$$

kur  $S(n)$  ir rindas koeficienti:

$$S(n) = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} s(t) e^{-jn \frac{2\pi}{\Theta} t} dt. \quad (2.25)$$

Ja ir dota  $K$  Diraka impulsu virkne, kas periodiski atkārtojas ar periodu  $\Theta$ , tad signālu  $s(t) = \sum_{m \in Z} c_m \delta(t - t_m)$ , kur  $t_{m+K} = t_m + \Theta$  un  $c_{m+K} = c_m$ , var ekvivalenti rakstīt

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k - m\Theta). \quad (2.26)$$

Signāla inovāciju skaitlis šajā gadījumā ir

$$\rho = \frac{2K}{\Theta}, \quad (2.27)$$

ko nosaka  $2K$  brīvības pakāpes (laika momenti un koeficienti) vienā periodā. Ņemot vērā, ka impulsu virkni  $\sum_{m \in Z} \delta(t - m\Theta)$  var izteikt ar Furjē rindu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Theta) = \frac{1}{\Theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (2.28)$$

tad izteiksmē (2.26)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k - m\Theta) = \frac{1}{\Theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn \frac{2\pi}{\Theta} (t - t_k)}. \quad (2.29)$$

No (2.26) un (2.29) seko

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \frac{1}{\Theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn \frac{2\pi}{\Theta}(t-t_k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Theta} \left( \sum_{k=0}^{K-1} c_k e^{-jn \frac{2\pi}{\Theta} t_k} \right) e^{jn \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (2.30)$$

līdz ar to impulsu virknes (2.26) Furjē rindas koeficienti ir

$$S(n) = \frac{1}{\Theta} \sum_{k=0}^{K-1} c_k e^{-jn \frac{2\pi}{\Theta} t_k}. \quad (2.31)$$

Kā vēlāk tiks parādīts, tad signālus ar šādu spektru pilnībā reprezentē  $2K + 1$  Furjē rindas koeficienti.

### 2.3.2. Anihilējošais filtrs

Anihilējošā filtra definīcija [78], [88]: filtru  $\zeta(n)$  sauc par signāla  $s(n)$  anihilējošo filtru, ja katram  $n \in Z$  izpildās:

$$(s * \zeta)(n) = 0. \quad (2.32)$$

Vienas eksponentfunkcijas signāla  $s(n) = c_0 e^{j\omega_0 n}$  anihilējošais filtrs ir:

$$\zeta(n) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n=0 \\ -e^{j\omega_0}, & \text{ja } n=1 \\ 0, & \text{citur.} \end{cases} \quad (2.33)$$

To viegli pārbaudīt:

$$(s * \zeta)(n) = s(n)\zeta(0) + s(n-1)\zeta(1) = c_0 e^{j\omega_0 n} - c_0 e^{j\omega_0(n-1)} e^{-j\omega_0} = 0. \quad (2.34)$$

Vairāku eksponentfunkciju signāla  $s(n) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k e^{j\omega_k n}$  anihilējošais filtrs ir:

$$\zeta(n) = (\zeta_0 * \zeta_1 * \dots * \zeta_{K-1})(n), \quad (2.35)$$

kur

$$\zeta_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n=0 \\ -e^{j\omega_k}, & \text{ja } n=1 \\ 0, & \text{citur.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Tas izriet no izteiksmes:

$$s * \zeta = (c_0 e^{j\omega_0 n} + \dots + c_{K-1} e^{j\omega_{K-1} n}) * (\zeta_0 * \dots * \zeta_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} (c_k e^{j\omega_k n} * (\dots * \zeta_k * \dots)) = 0. \quad (2.37)$$

Filtra (2.35) z-transformācija ir

$$\Xi(z) = \prod_{k=0}^{K-1} \Xi_k(z) = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - e^{j\omega_k} z^{-1}) = \sum_{k=0}^K \zeta(k) z^{-k}, \quad (2.38)$$

kur  $\zeta(0) = 1$ .

### 2.3.3. Anihilējošā filtra metode

Delta impulsu virknes (2.26) Furjē rindas koeficientiem (2.31) var atrast anihilējošā filtra koeficientus  $\zeta(n)$ ,  $n=0, 1, \dots, K$ , kuriem katram  $l \in Z$  izpildās vienādība

$$(S * \zeta)(l) = (\zeta * S)(l) = \sum_{n=0}^K \zeta(n) S(l-n) = 0. \quad (2.39)$$

Tātad  $\zeta(n)$  izriet no vienādojumu sistēmas

$$\begin{bmatrix} S(l) & S(l-1) & \cdots & S(l-K) \\ S(l+1) & S(l) & \cdots & S(l-K+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(l+K) & S(l+K-1) & \cdots & S(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(0) \\ \zeta(1) \\ \vdots \\ \zeta(K) \end{bmatrix} = 0, \quad (2.40)$$

kas satur  $2K+1$  spektra koeficientus  $S(l-K), S(l-K+1), \dots, S(l+K)$  frekvenču joslā  $[(l-K)\frac{2\pi}{\Theta}, (l+K)\frac{2\pi}{\Theta}]$ . Zinot  $\zeta(n)$  un ievērojot (2.38), tālāk jau var atrast anihilējošā filtra  $z$ -transformāciju

$$\Xi(z) = \sum_{n=0}^K \zeta(n) z^{-n} = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - e^{-j\frac{2\pi}{\Theta} t_k} z^{-1}), \quad (2.41)$$

no kuras izriet delta impulsu laika pozīcijas  $t_k$ . Svāra koeficientus  $c_k$  savukārt atrod no (2.31) izrietošās vienādojumu sistēmas

$$\frac{1}{\Theta} \begin{bmatrix} u_0^l & u_1^l & \cdots & u_{K-1}^l \\ u_0^{l+1} & u_1^{l+1} & \cdots & u_{K-1}^{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{l+K-1} & u_1^{l+K-1} & \cdots & u_{K-1}^{l+K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(l) \\ S(l+1) \\ \vdots \\ S(l+K-1) \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

kur  $u_k = e^{-j2\pi t_k l / \Theta}$ .

Nemot vērā iepriekš klāstīto, impulsu virknei (2.26) var formulēt šādu teorēmu [88]: izvēloties filtru ar impulsa reakciju  $h_B(t) = B \operatorname{sinc}(\pi B t)$ , kur  $B \geq \rho = 2K/\Theta$ , un diskretizējot signālu  $(s * h_B)(t)$  punktos  $t_m = m/B$ ,  $m=0, 1, \dots, M-1$ , kur  $M \geq 2N+1$  un  $N = \lfloor B\Theta/2 \rfloor$ , iegūtās nolases

$$y_m = \langle s(t), h_B(m/B - t) \rangle \quad (2.43)$$

ir pietiekamas, lai pilnībā raksturotu  $s(t)$ .

Teorēmas pierādījums ir sekojošs. Filtrs  $h_B(t)$  ir ideāls zemo frekvenču filtrs, kas ieejas signālu  $s(t)$  ierobežo frekvenču joslā  $[-\pi B, \pi B]$ , līdz ar to filtra izejas signālu  $y(t)$  apraksta Furjē rinda (2.24), ja  $|n2\pi/\Theta| \leq B\pi$ :

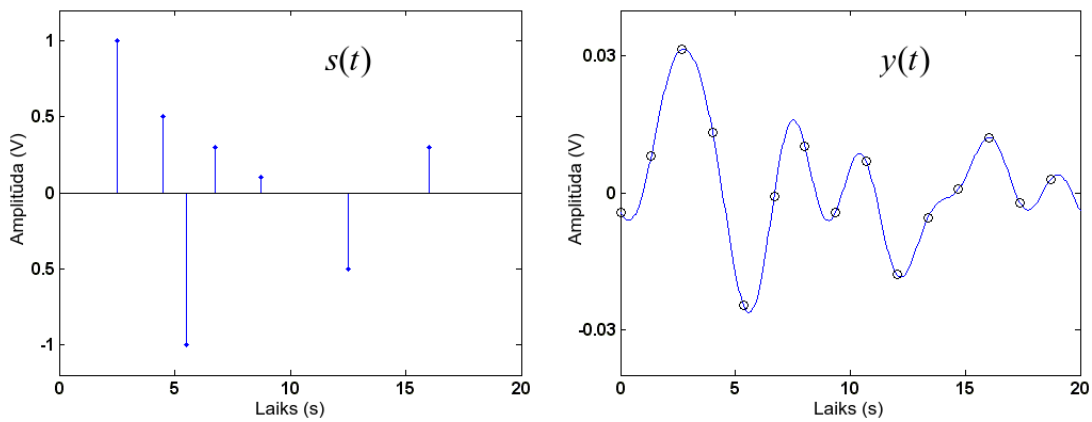
$$y(t) = (s * h_B)(t) = \sum_{n=-N}^N S(n) e^{j n \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (2.44)$$

kur  $N = \lfloor B \Theta / 2 \rfloor \geq K$ . Nofiltrētā signāla nolases savukārt ir

$$y_m = y(m/B) = \sum_{n=-N}^N S(n) e^{j n m \frac{2\pi}{\Theta B}}, \quad (2.45)$$

no kurienes izriet  $2N + 1$  koeficienti  $S(n)$ , ja vien  $M \geq 2N + 1$ . Tālāk, zinot  $S(n)$  un izvēloties  $l=0$ , no (2.40), (2.41) un (2.42) seko anihilējošā filtra koeficienti un meklētie laika momenti  $t_k$  un svara koeficienti  $c_k$ .

Apskatītās signālapstrādes piemērs parādīts 2.6. attēlā.



2.6. att. Diraka impulsu virkne  $s(t)$  un tai atbilstošais zemo frekvenču signāls  $y(t)$  ar nolāsēm  $y(m/B)$ , kas pilnībā raksturo  $s(t)$

Signāls  $s(t)$ , kas sastāv no  $K=7$  impulsiem un tādējādi aizņem bezgalīgi plašu frekvenču joslu, tiek filtrēts ar ideālu zemo frekvenču filtru, kura caurlaides josla  $[-\pi B, \pi B]$  izvēlēta saskaņā ar signāla inovāciju skaitli  $B \geq \rho = 2K/\Theta = 14/20 = 0.7$ . Filtra izejas signālu (2.6. attēlā pa labi) tālāk diskretizē punktos  $t_m = m/B$ , kur  $m=0, \dots, 14$ , lai no iegūtajām nolāsēm atrastu Furjē rindas (2.45) koeficientus  $S(n)$ ,  $|n| \leq N = K = 7$ . No tiem savukārt aprēķina anihilējošā filtra koeficientus un tālāk sekojošos impulsu parametrus  $t_k$  un  $c_k$ . Iegūtais rezultāts praktiski sakrīt ar oriģinālo impulsu virkni, tāpēc 2.6. attēlā nav atšķirams no  $s(t)$ .

**Citi signālu piemēri.** Anihilējošā filtra metodi var pielietot arī periodisku ar periodu  $\Theta$  nevienmērīgu splainu  $s(t)$  apstrādei, kuru  $R + 1$  kārtas atvasinājums ir periodiska Diraka impulsu virkne

$$s^{(R+1)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k - m\Theta), \quad (2.46)$$

kur  $t_k$  atbilst splainu mezglu vietām [88]. Līdz ar to, zinot signāla  $s(t)$  Furjē rindas koeficientus  $S(n)$ ,  $|n| \geq K$ , kurus atrod no filtrētā signāla  $(s * h_B)(t)$  nolāsēm, var aprēķināt

Diraka impulsu virknes koeficientus

$$S^{(R+1)}(n) = \left(jn \frac{2\pi}{\Theta}\right)^{R+1} S(n), \quad (2.47)$$

no kuriem tālāk seko anihilējošā filtra koeficienti un impulsu laika momenti  $t_k$  un svāra koeficienti  $c_k$ .

Metodi var pielietot arī ultraplātjoslas (UWB) signālu apstrādei. UWB pārraides gadījumā informācijas biti tiek sūtīti ar ultraīsiem impulsiem  $g(t)$ , kuru aizņemtā frekvenču josla pārsniedz 500 MHz. Uztvērēja daļā uzdevums ir atrast pārraidītā signāla

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k g(t-t_k) \quad (2.48)$$

laika momentus  $t_k$  un amplitūdas  $c_k$ , kas reducējas uz Diraka impulsu virknes uzdevumu, ņemot vērā, ka (2.48) ekvivalentā izteiksme ir:

$$s(t) = g(t) * \left( \sum_{k=0}^{K-1} c_k \delta(t-t_k) \right). \quad (2.49)$$

Līdz ar to, ja ir zināmi filtrētā signāla  $(s * h_B)(t)$  Furjē rindas koeficienti  $S(n)$ ,  $|n| \geq K$ , un UWB impulsa  $g(t)$  spektra koeficienti  $G(n)$ , tad var atrast delta impulsu virknei atbilstošos koeficientus  $S(n)/G(n)$ . Lai gan virkne šajā gadījumā ir galīga, anihilējošo metodi var pielietot arī ierobežota garuma signāliem, turklāt  $h_B(t)$  vietā var lietot arī Gausa filtru  $h_\sigma(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$  [88].

Ja UWB pārraidē izmanto dažādas formas impulsus  $\{g_l(t)\}_{l=1,2,\dots,L}$ , t.i.,

$$s(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=0}^{K_l-1} c_{lk} g_l(t-t_{lk}) = \sum_{l=1}^L \left( g_l(t) * \left( \sum_{k=0}^{K_l-1} c_{lk} \delta(t-t_{lk}) \right) \right), \quad (2.50)$$

tad anihilējošā filtra metodi vairs nevar pielietot, jo signālu veidojošās atsevišķās virknes  $g_l(t) * \left( \sum_{k=0}^{K_l-1} c_{lk} \delta(t-t_{lk}) \right)$  šajā gadījumā nav atdalāmas. Kā parādīts darbā [VI], arī šādu signālu atjaunošana no ierobežota skaita Furjē rindas koeficientiem ir iespējama, ja anihilējošā filtra vietā izmanto minimālās dispersijas filtru.

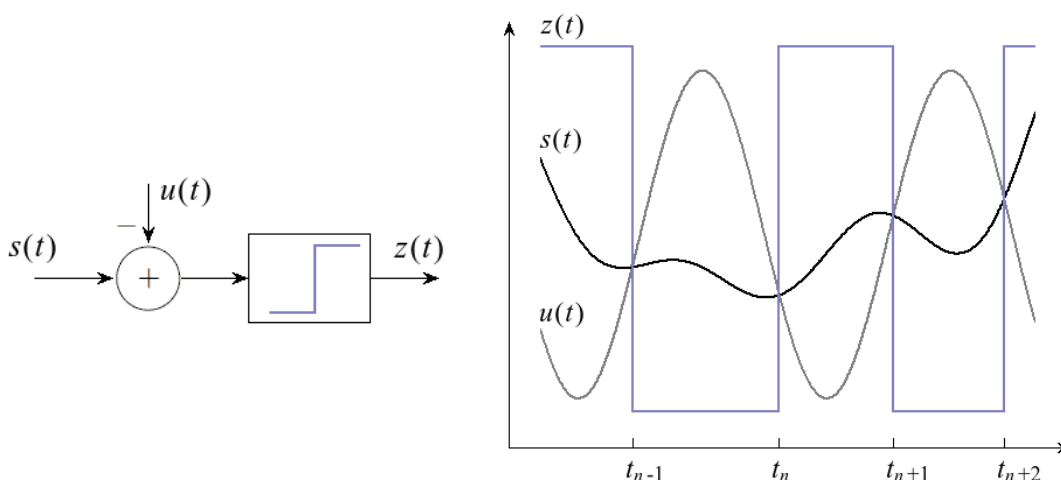
## 2.4. Laika kodēšana

Frekvenču joslā līdz  $F_{max}$  ierobežotus signālus  $s(t)$  parasti ir pieņemts reprezentēt ar laikā vienmērīgi izvietotām nolāsēm  $s(nT)$ ,  $n \in Z$ ,  $T \leq 1/(2F_{max})$ , kuru kodētās vērtības veido signālam  $s(t)$  atbilstošo ciparsignālu. Var teikt, ka ACP šajā gadījumā realizē amplitūdas

kodēšanu, jo informāciju par analogo signālu pēc pārveidojuma satur nolašu  $s(t_n=nT)$  kvantētās vērtības.

Laika kodēšana ir analogo signālu reprezentācija ar diskrēta laika secībām – informāciju par analogo signālu pēc pārveidojuma satur laika momentu  $t_n, n \in Z$ , kvantētās vērtības, bet pašu kodēšanu parasti veic asinhrons ACP (AACP), kas darbojas bez taktimpulsu ģenerators [49]. Šāda pieeja ļauj samazināt pārveidotāja enerģijas patēriņu, ko sinhrona ACP gadījumā paaugstina lielas taktimpulsu frekvences, kā arī ļauj samazināt elektromagnētisko interferenci, kas kropļo ieejas analogo signālu un pašu pārveidojumu kopumā [36], [87].

Viens no vienkāršākajiem laika kodēšanas piemēriem parādīts 2.7. attēlā.

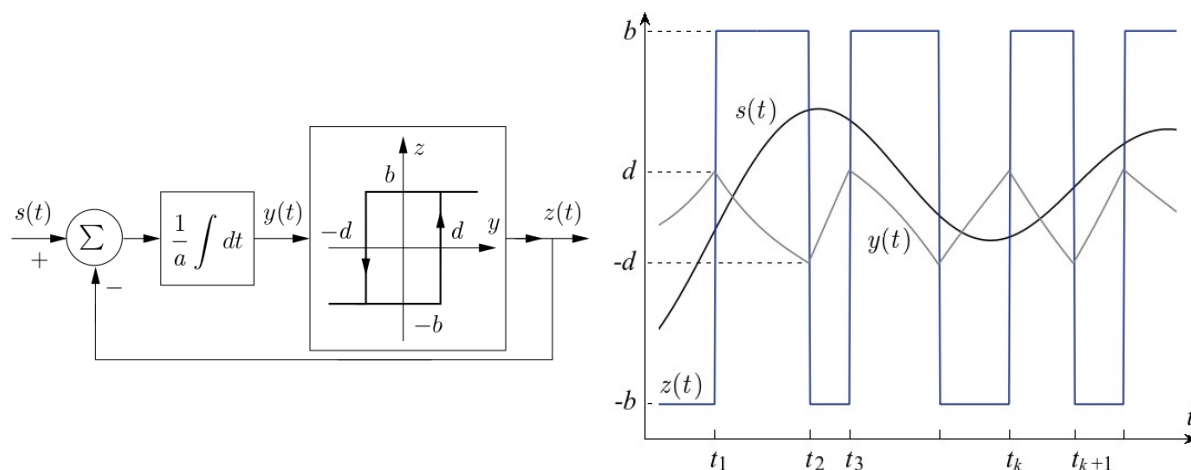


2.7. att. Ieejas signāla  $s(t)$  reprezentācija ar diskrēta laika  $t_n$  secību, kas atbilst izejas signāla  $z(t)$  pārslēgumu vietām

Komparatora ieejas signālu  $s(t) - u(t)$ , kur  $u(t)$  ir zināms, šajā gadījumā salīdzina ar nulles sprieguma līmeni. Rezultātā iegūtie laika momenti  $t_n$ , kas atbilst komparatora izejas signāla  $z(t)$  pārslēgumu vietām, reprezentē ieejas signāla  $s(t)$  vērtības  $s(t_n) = u(t_n)$ . Zināmākie šāda veida pārveidojumi ir nulles līmeņa šķērsojumu diskretizācija, kad  $u(t) = 0$  [54], [68], un sinuslīnijas šķērsojumu diskretizācija, kad  $u(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t)$ , kur  $A_0 \geq |s(t)|$  un  $f_0$  parasti pārsniedz  $s(t)$  maksimālo frekvenci [9], [62].

Nedaudz sarežģītāks piemērs ir asinhronais sigma-delta modulators (ASDM), kura blokshēma parādīta 2.8. attēlā [40], [50]. Tas sastāv no summatora, integratora un Šmita triguera ar ķēdes parametriem  $a$ ,  $b$  un  $d$ . Ieejas signāla  $s(t)$  vērtības ir ierobežotas:

$$|s(t)| \leq c < b. \quad (2.51)$$



2.8. att. ASDM blokshēma un tā signāli:  $s(t)$  – ieejas signāls,  $y(t)$  – integratora izejas signāls,  $z(t)$  – trigeru izejas signāls

ASDM darbības aprakstam sākumā pieņem, ka trigeru izejas signāls ir negatīvs, t.i.,  $z(t) = -b$  (2.8. attēls). Integratora ieejas signāls  $s(t) + b$  ir pozitīvs, bet izejas signāls  $y(t)$  – laikā augoša funkcija. Laika momentā  $t_1$ , kad  $y(t)$  sasniedz vērtību  $y(t_1) = d$ , trigeru izejas signāls maina zīmi uz pretējo un integratora ieejas signāls  $s(t) - b$  kļūst negatīvs, kā rezultātā  $y(t)$  sāk samazināties, līdz laika momentā  $t_2$  tas sasniedz vērtību  $y(t_2) = -d$ , kas attiecīgi maina trigeru izejas signāla zīmi uz pretējo, un cikls atkārtojas. Laika intervāliem  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $t \in [t_2, t_3]$  un vispārīgā gadījumā  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \in Z$ , līdz ar to var rakstīt:

$$y(t_1) + \frac{1}{a} \int_{t_1}^{t_2} (s(t) - b) dt = -d \quad \Leftrightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt = -2ad + b(t_2 - t_1), \quad (2.52)$$

$$y(t_2) + \frac{1}{a} \int_{t_2}^{t_3} (s(t) + b) dt = d \quad \Leftrightarrow \quad \int_{t_2}^{t_3} s(t) dt = 2ad - b(t_3 - t_2), \quad (2.53)$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} s(t) dt = (-1)^k (2ad - b(t_{k+1} - t_k)). \quad (2.54)$$

Kā izriet no (2.51) un (2.54), tad attālumi starp secīgiem pārslēgumiem  $t_k$  un  $t_{k+1}$  ir ierobežoti ar nevienādību

$$\frac{2ad}{b+c} \leq t_{k+1} - t_k \leq \frac{2ad}{b-c}, \quad (2.55)$$

kas attiecīgi ļauj izvēlēties tādus  $a$ ,  $b$  un  $d$  parametrus, kuriem maksimālais attālums nepārsniedz Naikvista soli, kas svarīgi ir pie signālu atjaunošanas.

Laika kodēšanai pretēja darbība ir laika dekodēšana, kas ir analogo signālu atjaunošana no diskrēta laika secībām. 2.7. attēlā parādītajam piemēram dekodēšana ir ekvivalenta signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, jo signāla vērtības

$s(t_n) = u(t_n)$  šajā gadījumā ir zināmas. Atjaunošana parasti ir iespējama, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm frekvenču joslā ierobežotiem signāliem nepārsniedz Naikvista soli, t.i., izpildās nevienādība

$$\Delta t_{max} = \sup_{n \in Z} (t_{n+1} - t_n) < \frac{1}{2F_{max}}, \quad (2.56)$$

kur  $F_{max}$  ir maksimālā frekvence signāla spektrā [29], [60].

ASDM gadījumā, ja izpildās (2.56), tad līdz  $F_{max}$  ierobežotu signālu atjaunošana ir iespējama saskaņā ar iteratīvu algoritmu [50]

$$s_{l+1}(t) = s_l(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (q_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} s_l(u) du) g(t - \tau_k), \quad (2.57)$$

kur  $l \geq 0$  apzīmē iterācijas numuru,

$$s_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k g(t - \tau_k), \quad (2.58)$$

koeficienti  $q_k$  ir zināmi un sakrīt ar vienādojuma (2.54) labo pusi:

$$q_k = (-1)^k (2ad - b(t_{k+1} - t_k)), \quad (2.59)$$

aiztures  $\tau_k = (t_k + t_{k+1})/2$ , un funkcija

$$g(t) = 2F_{max} \text{sinc}(2\pi F_{max} t) \quad (2.60)$$

atbilst ideālam zemo frekvenču filtram. Signālu  $s(t)$  iegūst robežgadījumā, kad  $l$  tiecas uz bezgalību, un, kā izriet no (2.57), tad to var ekvivalenti rakstīt:

$$s(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} s_l(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n g(t - \tau_n), \quad (2.61)$$

kur nezināmos koeficientus  $c_n$  atrod no (2.54),  $s(t)$  vietā liekot (2.61):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t - \tau_n) dt = q_k. \quad (2.62)$$

Rakstot (2.62) matricu formā, iegūst

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} \mathbf{c}, \quad (2.63)$$

no kurienes seko

$$\mathbf{c} = \mathbf{G}^+ \mathbf{q}, \quad (2.64)$$

kur  $\mathbf{G}^+$  ir matricas  $\mathbf{G}$  pseidoinversā matrica, bet  $\mathbf{G}$  elementi ir  $G_{k,n} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t - \tau_n) dt$  [50], [90].

## 2.5. Kopsavilkums

Otrajā nodaļā tika apskatītas vairākas signālapstrādes pieejas, kas pamatojās uz faktu, ka daudzus signālus, kas klasiski aizņem plašu frekvenču joslu un tādējādi prasa augstu diskretizācijas frekvenci, kompakti var attēlot noteiktā funkciju bāzē. Problēma šajā gadījumā bija atrast paņēmienus, kā no signāla ar mazu mērījumu skaitu iegūt visus tos parametrus, kas pilnībā raksturo šo signālu.

DASP gadījumā tika apskatīti plaša frekvenču diapazona signāli, kuriem no nulles atšķirīgā spektra daļa izvietojās salīdzinoši mazā frekvenču joslā. Tas ļāva šos signālus apstrādāt ar samazinātu vidējo diskretizācijas frekvenci, pielietojot pseidogadījum-diskretizāciju, kas pavājināja frekvenču uzklāšanās efektu un tādējādi paplašināja tālākās signālapstrādes iespējas.

Kompresīvās detektēšanas gadījumā tika apskatīti signāli, kas noteiktā funkciju bāzē bija izsakāmi ar nelielu no nulles atšķirīgu koeficientu skaitu  $M$ . Tas ļāva šos signālus precīzi reprezentēt ar signāla un gadījumvērtību matricas skalāriem reizinājumiem, kuru skaitu  $L$  noteica no nulles atšķirīgo koeficientu skaits  $M$ .

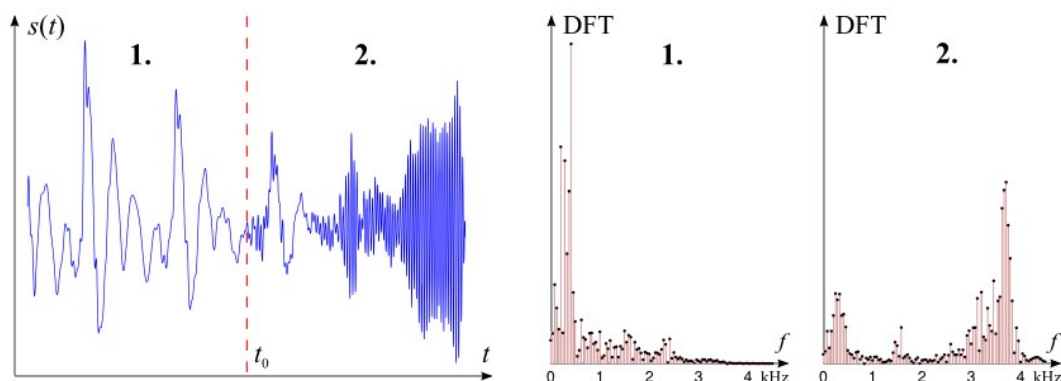
Trešā signālapstrādes pieeja apskatīja signālus ar galīgu inovāciju skaitli, kas ļāva plaša frekvenču diapazona signālus atjaunot no mazā frekvenču joslā uzdotiem to spektru koeficientiem ar anihilējošā filtra metodi.

Visu trīs pieeju kopīgā pamatdoma ir – signālu pilnīgai reprezentācijai pietiek ar tik nolasēm/mērījumiem, cik liels ir signāla inovāciju skaitlis – parametru skaits, kas raksturo signālu. Atšķiras tikai nolašu/mērījumu iegūšanas veids un to tālākā apstrāde sākotnējā signāla atjaunošanai.

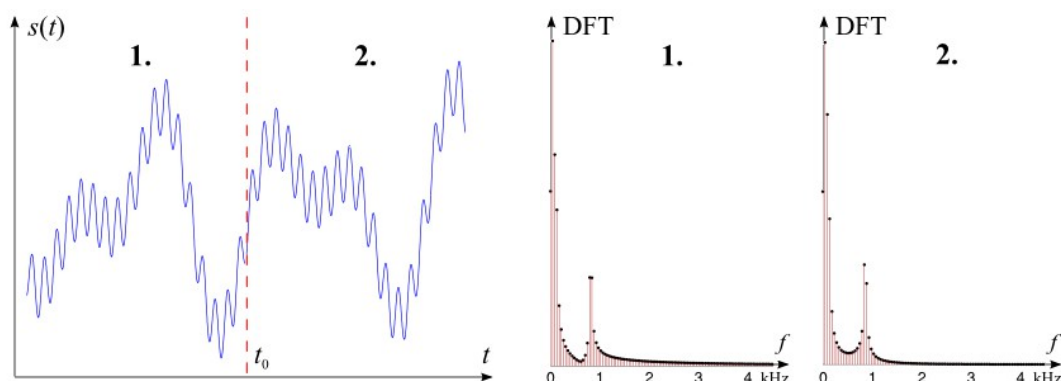
Kā ceturrtā ar pirmajām trīs nesaistīta pieeja tika apskatīta signālu laika kodēšana, kas ir analogo signālu reprezentācija ar diskrēta laika secībām. Laika kodēšanu parasti veic asinhrons ACP, kuram ir vairākas priekšrocības salīdzinājumā ar sinhroniem pārveidotājiem – samazināts enerģijas patēriņš un elektromagnētiskā interference, bet sarežģītāka kļūst signālu pēcapstrāde.

### 3. SIGNĀLATKARĪGA NOLAŠU IEGUVE UN APSTRĀDE

Praksē sastopamie reālās pasaules signāli bieži vien ir nestacionāri ar laikā mainīgām frekvenču īpašībām. Par nestacionāru signālu šajā gadījumā sauksim signālu, kura spektrālais sastāvs dažādos laika intervālos ir atšķirīgs (3.1. attēls), savukārt stacionāram signālam neatkarīgi no intervāla spektrālais sastāvs paliek nemainīgs (3.2. attēls).



3.1. att. Runas (nestacionārs) signāls un divu tā intervālu DFT koeficientu absolūtās vērtības



3.2. att. Stacionārs signāls un divu tā intervālu DFT koeficientu absolūtās vērtības

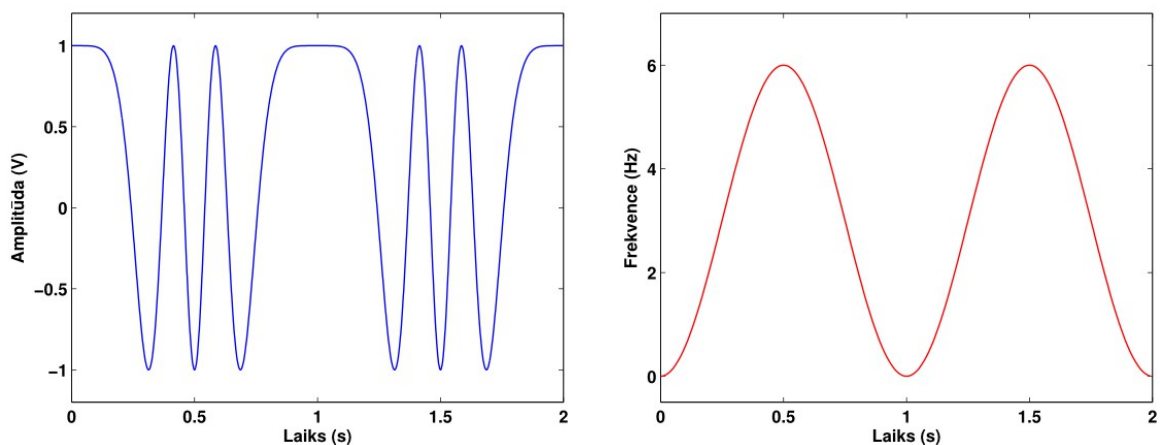
Kā redzams no 3.1. attēla, tad signāls  $s(t)$  laika intervālā līdz  $t_0$  mainās salīdzinoši lēnāk nekā otrajā intervālā pēc  $t_0$ , līdz ar to loģisks ir jautājums, vai signāla nolases pirmajā intervālā var ņemt retāk nekā otrajā? Ja var, tad kā izvēlēties nolašu  $s(t_n)$  laika pozīcijas  $t_n$ , lai signāls būtu precīzi atjaunojams? Uz šiem jautājumiem atbildēsim šajā nodaļā.

#### 3.1. Svārstības ar laikā mainīgu frekvenci diskretizācija

Par svārstību ar laikā mainīgu frekvenci  $f(t) > 0$  sauksim signālu  $s(t) = \cos(\Phi(t))$ , kura fāze

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

ir monotoni augoša funkcija. Kā piemēru tālāk apskatīsim signālu  $s_1(t)=\cos(\Phi_1(t))$  ar frekvenci  $f_1(t)=3-3\cos(2\pi t)$  un fāzi  $\Phi_1(t)=6\pi t-3\sin(2\pi t)$  (3.3. attēls).



3.3. att. Svārstība  $s_1(t)$  un tās momentānā frekvence  $f_1(t)$

Signāls

$$s_1(t)=\cos(\Phi_1(t))=\cos(6\pi t)\cos(3\sin(2\pi t))+\sin(6\pi t)\sin(3\sin(2\pi t)) \quad (3.2)$$

ir periodisks, un tā diskrēto spektru atrod, ņemot vērā izvirzījumus

$$\cos(3\sin(2\pi t))=J_0(3)+2J_2(3)\cos(4\pi t)+2J_4(3)\cos(8\pi t)+\dots \quad (3.3)$$

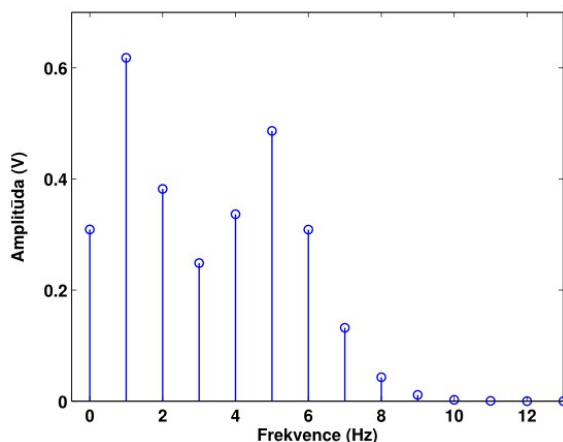
un

$$\sin(3\sin(2\pi t))=2J_1(3)\sin(2\pi t)+2J_3(3)\sin(6\pi t)+2J_5(3)\sin(10\pi t)+\dots, \quad (3.4)$$

kur  $J_m(3)$  ir pirmā veida  $m$  - kārtas Beseļa funkcija ar argumentu 3. No (3.2), (3.3) un (3.4) seko:

$$s_1(t)=J_3(3)+(J_2(3)+J_4(3))\cos(2\pi t)+(J_1(3)+J_5(3))\cos(4\pi t)+ \\ + (J_0(3)+J_6(3))\cos(6\pi t)+\sum_{m=4}^{\infty}((-1)^{m-3}J_{m-3}(3)+J_{m+3}(3))\cos(m2\pi t), \quad (3.5)$$

kur pieaugot  $m$ ,  $J_m(3)$  vērtības samazinās, līdz ar to samazinās arī signāla harmoniku amplitūdas (3.4. attēls).



3.4. att. Signāla  $s_1(t)$  amplitūdu spektrs joslā līdz 13 Hz

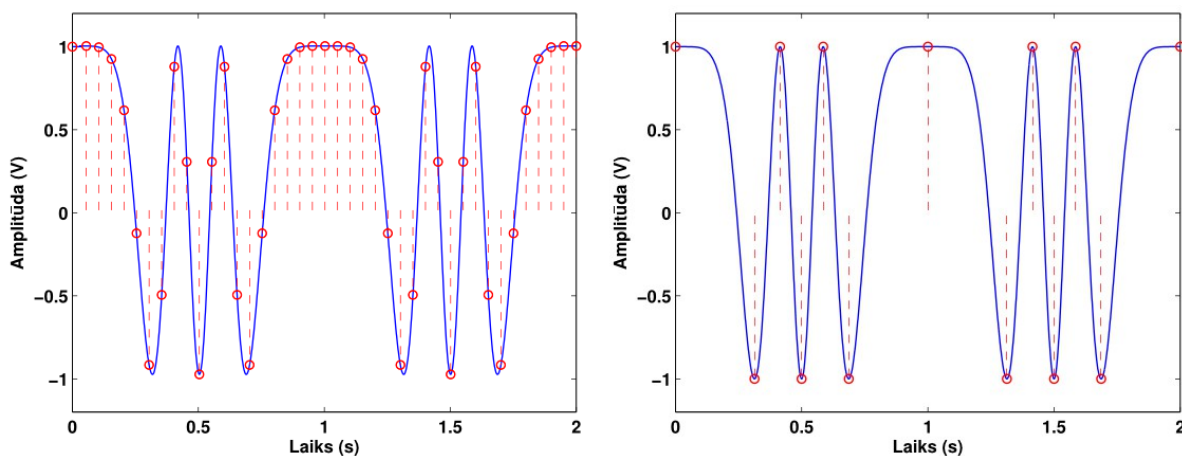
Lai signālu diskretizētu vienmērīgi, pieņem, ka tā maksimālā frekvence ir  $F_{max}=10$  Hz, un pārējo spektra daļu aizvāc ar ideālu zemo frekvenču filtru. Rezultātā iegūto aproksimāciju  $\tilde{s}_1(t)$ , kas satur sākotnējā signāla  $s_1(t)$  līdzkomponenti un pirmās 10 harmonikas, pilnībā reprezentē laikā vienmērīgi izvietotas nolases  $\tilde{s}_1(t_k)$  saskaņā ar izteiksmi

$$\tilde{s}_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_1(t_k) \text{sinc}(2\pi F_{max}(t-t_k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_1(t_k) h_1(t, t_k), \quad (3.6)$$

kur

$$h_1(t, t_k) = \text{sinc}(2\pi F_{max}(t-t_k)) = \text{sinc}(2\pi F_{max}t - k\pi) \quad (3.7)$$

un  $t_k = k/(2F_{max})$  (3.5. attēls pa kreisi).



3.5. att. No signāla neatkarīga vienmērīgā (pa kreisi) un signālatkarīga nevienmērīgā (pa labi) diskretizācijas

No 3.5. attēla pa kreisi redzams, ka signāla nolases lēni mainīgās vietās tiek ņemtas tikpat bieži, cik ātri mainīgās vietās. To nosaka globālais parametrs  $F_{max}$ , kas ir maksimālā frekvence signāla spektrā, ja signālu analizē visā tā garumā. Ja signālu apskata lokāli, t.i., ierobežotā laika intervālā, tad katram intervālam atbilstošā signāla fragmenta maksimālā frekvence (lokālais parametrs  $f_{max}$ ) varētu būt mazāka, līdz ar to mazāka varētu būt arī signāla diskretizācijas frekvence šajā intervālā. Piemēram, 3.3. attēlā parādītajam signālam  $s_1(t)$  lokālā maksimālā frekvence  $f_{max}(t)$  sakrīt ar signāla momentāno frekvenci  $f_1(t)$ . Jautājums ir – kā atkarībā no  $f_{max}(t)$  izvēlēties nolašu  $s_1(t_n)$  izvietošanu laikā, t.i., kā izvēlēties  $t_n$ , lai šīs nolases precīzi reprezentētu analogo signālu?

Viens no paņēmieniem šajā gadījumā ir – nolases  $s_1(t_n)$  ņem signāla maksimumos un minimumos (3.5. attēls pa labi), tātad spēkā jābūt vienādībai

$$s_1(t_n) = \cos(\Phi_1(t_n)) = (-1)^n, \quad (3.8)$$

no kuras izriet:

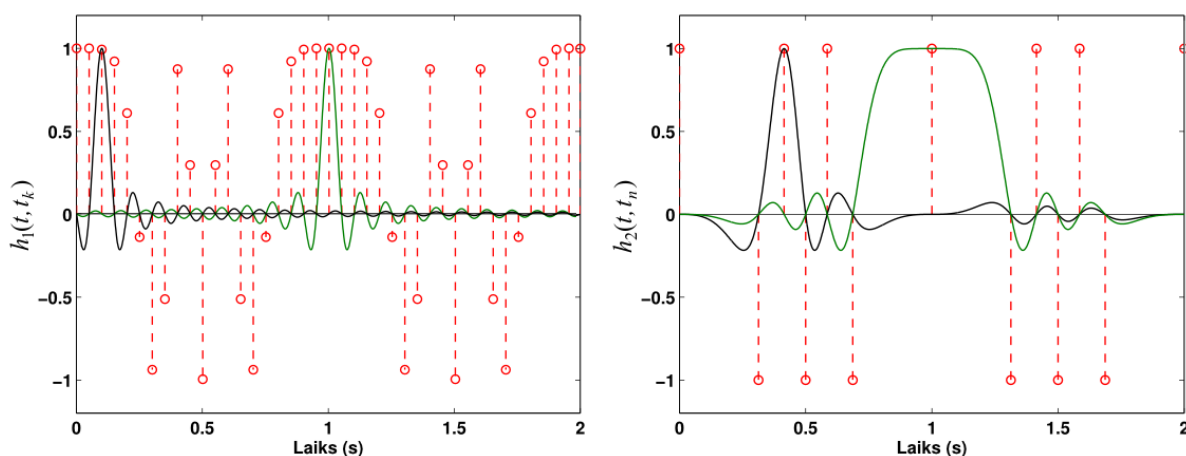
$$\Phi_1(t_n) = n\pi \Rightarrow t_n = \Phi_1^{-1}(n\pi), \quad (3.9)$$

kur  $\Phi^{-1}(\cdot)$  ir funkcijas  $\Phi(\cdot)$  inversā funkcija. Ņemot vērā, ka  $\Phi_1(t)$  augšanas ātrums ir atkarīgs no signāla frekvences  $f_1(t)$ , tad arī nolašu izvietojums ir atkarīgs no  $f_{max}(t) = f_1(t)$ . Atliek tikai noskaidrot, kā atjaunot  $s_1(t)$  no  $s_1(t_n)$ .

Vienmērīgās diskretizācijas gadījumā signālu  $\tilde{s}_1(t)$  atjauno saskaņā ar (3.6), veicot nolašu  $\tilde{s}_1(t_k)$  interpolāciju ar *sinc* funkcijām  $h_1(t, t_k)$ , kuru vērtības nolašu vietās

$$h_1(t_l, t_k) = \begin{cases} 0, & \text{ja } l \neq k \\ 1, & \text{ja } l = k \end{cases} \quad (3.10)$$

Divas šādas funkcijas atbilstoši 3. un 21. nolasei parādītas 3.6. attēlā pa kreisi.



3.6. att. No signāla neatkarīgas (pa kreisi) un signālatkarīgas (pa labi) interpolācijas funkcijas

Ja tagad apskata signālatkarīgo diskretizāciju ar nolašu vietām (3.9), kas atbilst signāla maksimumiem un minimumiem, tad pēc līdzības ar klasisko gadījumu var atrast tādas interpolācijas funkcijas  $h_2(t, t_n)$ , kurām

$$h_2(t_l, t_n) = \begin{cases} 0, & \text{ja } l \neq n \\ 1, & \text{ja } l = n \end{cases} \quad (3.11)$$

Izvēloties funkciju  $\sin(\Phi_1(t))$ , tās vērtības  $\sin(\Phi_1(t_n))$  ar nulli sakrītīs visiem  $t_n$ , jo  $\Phi_1(t_n) = n\pi$ . Ja šo funkciju tagad dalīs ar argumentu  $\Phi_1(t)$ , tad funkcijas  $\text{sinc}(\Phi_1(t))$  vērtības nolašu vietās  $t_n$  ar nulli sakrītīs visiem  $t_n$ , izņemot pie  $t_n = 0$ , kad  $\text{sinc}(\Phi_1(0)) = 1$ . Savukārt nobīdītas funkcijas  $\text{sinc}(\Phi_1(t) - \Phi_1(t_n))$  atbildīs (3.11), jo  $\text{sinc}(\Phi_1(t_l) - \Phi_1(t_n)) = \text{sinc}((l-n)\pi)$ . Tātad meklētās interpolācijas funkcijas ir

$$h_2(t, t_n) = \text{sinc}(\Phi_1(t) - \Phi_1(t_n)) = \text{sinc}(\Phi_1(t) - n\pi), \quad (3.12)$$

kuru svārstību raksturs ir atkarīgs no signāla frekvences  $f_1(t)$ . Divas šādas funkcijas atbilstoši 3. un 7. nolasēm parādītas 3.6. attēlā pa labi.

Līdzīgi kā (3.6), signāla  $s_1(t)$  atjaunošanai var lietot izteiksmi

$$\hat{s}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(t_n) h_2(t, t_n) \quad (3.13)$$

Tā kā funkcijām  $h_2(t, t_n)$  izpildās (3.11), tad atjaunotā signāla  $\hat{s}_1(t)$  vērtības laika momentos  $t_n$  sakrītīs ar nolašu vērtībām  $s_1(t_n)$ . Bet kāds būs atjaunotais signāls laika intervālos starp nolasēm, salīdzinot ar  $s(t)$ ? Ņemot vērā, ka  $s_1(t_n) = (-1)^n$ , no (3.13) un (3.12) iegūst

$$\hat{s}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\Phi_1(t) - n\pi)}{\Phi_1(t) - n\pi} = \sin(\Phi_1(t)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi_1(t) - n\pi} \quad (3.14)$$

Ievērojot kotangensa izteiksmi

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x + n} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}(\pi x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi x - n\pi}, \quad (3.15)$$

seko

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi_1(t) - n\pi} = \operatorname{ctg}(\Phi_1(t)), \quad (3.16)$$

līdz ar to atjaunotais signāls

$$\hat{s}_1(t) = \sin(\Phi_1(t)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi_1(t) - n\pi} = \sin(\Phi_1(t)) \operatorname{ctg}(\Phi_1(t)) = \cos(\Phi_1(t)) \quad (3.17)$$

precīzi sakrīt ar oriģinālo  $s_1(t)$ .

**Secinājums.** Iegūta ir *sinc* funkcija

$$h(t, t_n) = \operatorname{sinc}(\Phi(t) - \Phi(t_n)) = \operatorname{sinc}(\Phi(t) - n\pi), \quad (3.18)$$

kurās forma ir atkarīga no laika pozīcijas  $t_n$ , bet svārstību raksturs – no funkcijas  $\Phi(t)$ , kas dažādiem signāliem varētu būt dažāda un atspoguļotu to laikā mainīgās frekvenču īpašības. Zinot  $\Phi(t)$ , signāla nolases varētu ņemt laika momentos  $t_n = \Phi_1^{-1}(n\pi)$ ,  $n \in Z$ , bet signāla atjaunošanai varētu lietot nolašu interpolācijas izteiksmi

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) h(t, t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \operatorname{sinc}(\Phi(t) - n\pi), \quad (3.19)$$

kurās speciālgadījumā, ja  $\Phi(t) = \pi t/T$ , iegūst klasisko Šenona formulu (1.1), kas atbilst signāla atjaunošanai no laikā vienmērīgi izvietotām nolasēm  $s(t_n = nT)$ .

Saistībā ar iegūto *sinc* funkcijas izteiksmi (3.18) tālāk apskatīsim jautājumus: kā noteikt signālam atbilstošo funkciju  $\Phi(t)$ , un cik precīzi atjaunotais signāls (3.19) sakrītīs ar pašu signālu  $s(t)$ .

### 3.2. Paplašinātā Furjē rinda

No klasiskās teorijas labi zināms, ka periodiskus signālus ar periodu  $\Theta$  var izvērst trigonometrisku funkciju Furjē rindā [18]

$$s(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Theta} t\right) + \beta_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Theta} t\right), \quad (3.20)$$

kur koeficientus  $\alpha_n$  un  $\beta_n$  atrod:

$$\alpha_n = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\Theta} s(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{\Theta} t\right) dt, \quad (3.21)$$

$$\beta_n = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\Theta} s(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{\Theta} t\right) dt. \quad (3.22)$$

Līdzīgi šos signālus var izvērst arī kompleksu eksponentfunkciju Furjē rindā [18]

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{jn \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (3.23)$$

kur

$$\gamma_n = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} s(t) e^{-jn \frac{2\pi}{\Theta} t} dt. \quad (3.24)$$

Abos gadījumos rindas koeficientus iegūst, minimizējot kļūdas signāla  $s(t) - y(t)$  enerģiju

$$\int_0^{\Theta} |s(t) - y(t)|^2 dt, \quad (3.25)$$

kur  $y(t)$  sakrīt ar (3.20) vai (3.23) labo pusi.

Kā parādīts darbā [I], tad periodiskus signālus ar periodu  $\Theta$  var izvērst paplašinātajā trigonometrisko funkciju Furjē rindā (EFS: extended Fourier series) ar laikā mainīgām frekvencēm, t.i., rindā

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right), \quad (3.26)$$

kur

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{g(\tau)} d\tau, \quad (3.27)$$

bet  $g(t) > 0$  ir periodiska ar periodu  $\Theta$  funkcija. Rindas koeficientus

$$a_n = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt \quad (3.28)$$

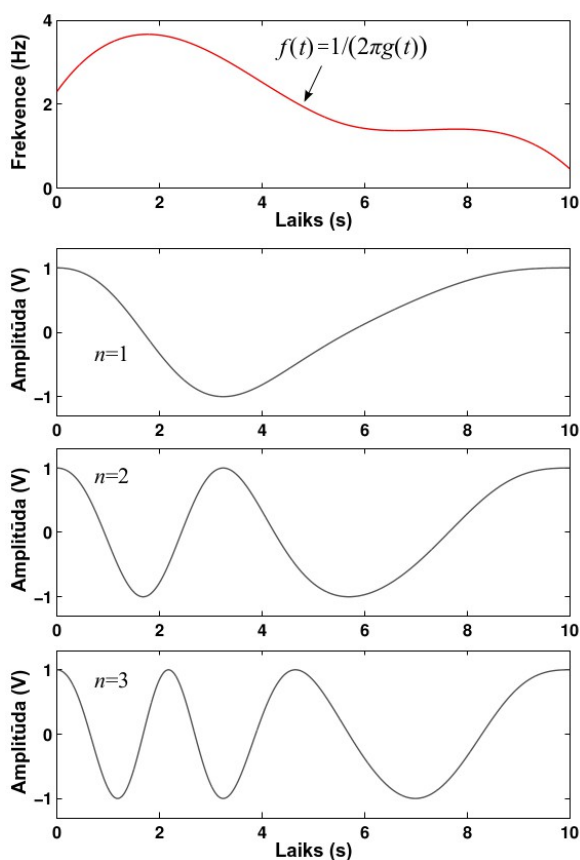
un

$$b_n = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^\Theta \frac{s(t)}{g(t)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt \quad (3.29)$$

šajā gadījumā atrod, minimizējot svērtā kļūdas signāla  $(s(t) - y(t))/\sqrt{g(t)}$  enerģiju

$$\int_0^\Theta \frac{1}{g(t)} (s(t) - y(t))^2 dt, \quad (3.30)$$

kur  $y(t)$  sakrīt ar (3.26) labo pusi (koeficientu izvedums dots 4. pielikumā). Trigonometrisko funkciju piemērs, ja  $g(t) = 1/(2\pi f(t))$ , bet  $f(t) > 0$  ir laikā mainīga frekvence, parādīts 3.7. attēlā.



3.7. att. Periodiska funkcija  $f(t) = 1/(2\pi g(t))$  ar periodu  $\Theta = 10$  sekundes un pirmās trīs tai atbilstošās EFS funkcijas  $\cos(n 2\pi \Phi(t)/\Phi(\Theta))$

No koeficientu  $a_n$  un  $b_n$  izteiksmēm (3.28) un (3.29) izriet Beseļa nevienādība

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^\Theta \frac{s^2(t)}{g(t)} dt \geq \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \quad (3.31)$$

un Parsevala vienādība

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^\Theta \frac{s^2(t)}{g(t)} dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (3.32)$$

куру izvedumi doti 4. pielikumā.

Bieži vien trigonometrisko funkciju vietā ērtāks ir eksponentfunkciju lietojums – periodiskus signālus ar periodu  $\Theta$  var izvērst paplašinātajā kompleksu eksponentfunkciju Furjē rindā

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)}, \quad (3.33)$$

kur koeficientu

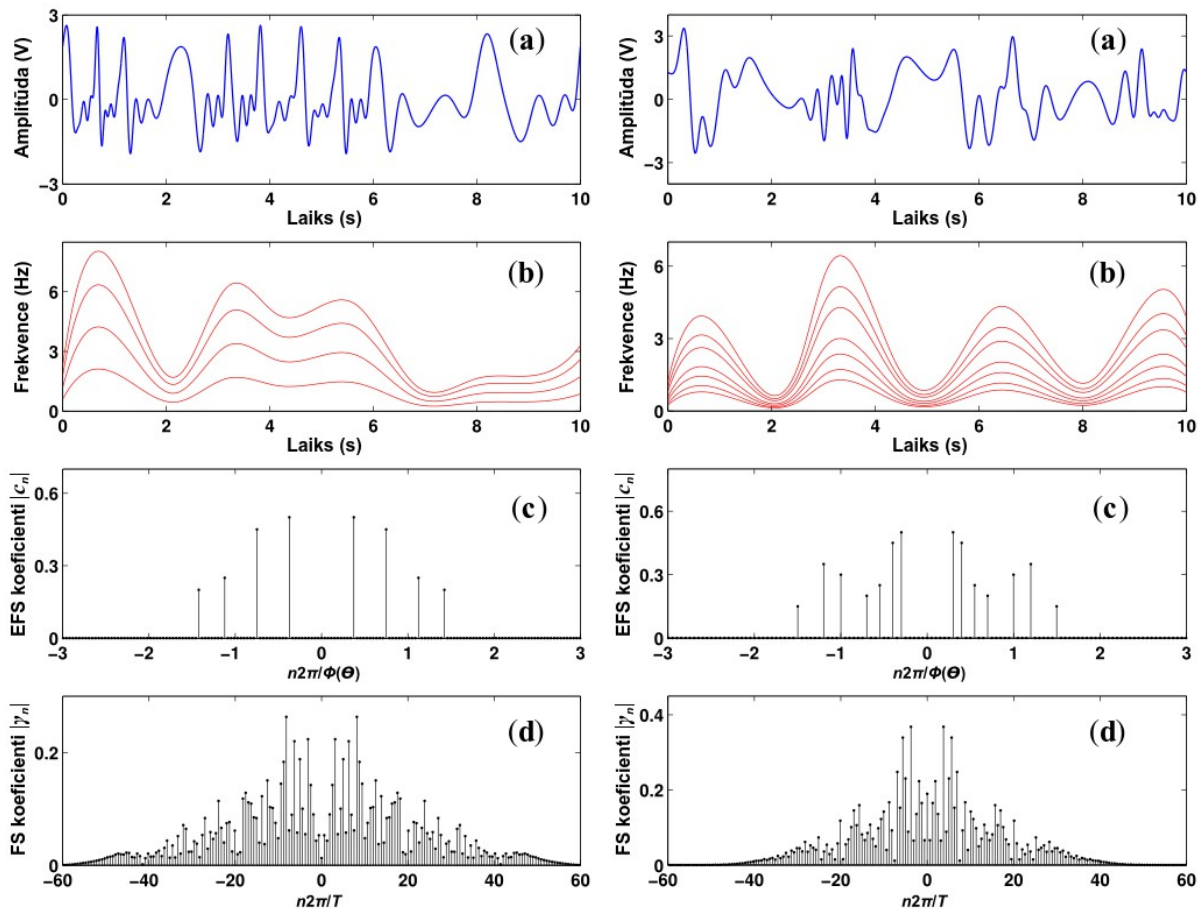
$$c_n = \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} dt \quad (3.34)$$

izvedums dots 5. pielikumā. Beseļa nevienādība un Parsevala vienādība šoreiz ir

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \left| \frac{s(t)}{g(t)} \right|^2 dt \geq \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (3.35)$$

un

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \left| \frac{s(t)}{g(t)} \right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (3.36)$$



3.8. att. EFS (c) un FS (d) amplitūdu spektri periodiskiem ar periodu  $\Theta=10$  sekundes signāliem (a), kas sastāv no četrām (pa kreisi) un septiņām (pa labi) trigonometriskām funkcijām ar kārtņām laikā mainīgām frekvencēm (b)

Nemot vērā, ka (3.34) var ekvivalenti rakstīt

$$c_n = \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^\Theta \frac{s(t)}{g(t)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt - j \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^\Theta \frac{s(t)}{g(t)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt, \quad (3.37)$$

tad  $c_n$  var izteikt ar trigonometriskās rindas koeficientiem  $a_n$  un  $b_n$ :

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n), \quad n > 0. \quad (3.38)$$

Savukārt  $a_n$  un  $b_n$  var izteikt:

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j(c_n - c_{-n}), \quad n > 0. \quad (3.39)$$

EFS spektru piemēri diviem signāliem, kas sastāv no četrām (pa kreisi) un septiņām (pa labi) svārstībām ar frekvencēm  $k f_1(t)$ ,  $k=1,2,3,4$ , un  $m f_2(t)$ ,  $m=1,2,\dots,7$ , parādīti 3.8. attēlā. Pirmā signāla spektra aprēķinam tika lietota funkcija  $g_1(t)=1/(2\pi f_1(t))$ , bet otrā signāla spektram – funkcija  $g_2(t)=1/(2\pi f_2(t))$ . Attēlā parādīti arī abu signālu klasiskās Furjē rindas FS spektri, kas atbilst EFS speciālgadījumam, kad  $g_1(t)=g_2(t)=1$ .

Kā izriet no 3.8. attēla, tad frekvenču joslā neierobežotus signālus ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu kompakti var reprezentēt ar EFS rindu, ja vien funkciju  $g(t)$  izvēlas atbilstoši konkrētajam signālam. Šo tēmu par funkcijas  $g(t)$  izvēli apskatīsim nedaudz vēlāk.

### 3.3. Paplašinātā Furjē transformācija

Ar paplašināto Furjē rindu (3.33) var aprakstīt arī galīga garuma signālus, kuru vērtības no nulles atšķiras ierobežotā laika intervālā  $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ . Šajā gadījumā iespējami divi varianti: pirmais – pieņem, ka dotais signāla fragments periodiski atkārtojas ar periodu  $\Theta \geq \Delta t$ , un otrais – pieņem, ka signāla periods  $\Theta$  tiecas uz bezgalību, kā rezultātā bezgalīgi liela kļūst  $\Phi(\Theta)$  vērtība, ko nosaka funkcijas  $\Phi(t)$  monotonā augšana, un bezgalīgi mazi kļūst koeficienti  $c_n$  un attālums starp diskrētā spektra komponentēm  $2\pi/\Phi(\Theta)$ . Lai izvairītos no bezgalīgi maziem lielumiem, izteiksmes (3.34) abas puses reizina ar  $\Phi(\Theta)$ , un robežgadījumā, kad  $\Phi(\Theta)$  kļūst bezgalīgi liels, diskrētās frekvences  $n 2\pi/\Phi(\Theta)$  aizstāj ar nepārtrauktu lielumu  $\omega_g$ . Rezultātā iegūtā izteiksme

$$S(\omega_g) = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} c_n \Phi(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt \quad (3.40)$$

sakrīt ar paplašinātās Furjē transformācijas (EFT: extended Fourier transform) definīciju

$$S(\omega_g) = \tilde{F}[s(t), g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt, \quad (3.41)$$

kas dota darbā [52] saistībā ar laikā mainīgu caurlaides joslu filtru analīzi. Turpat arī dota inversās paplašinātās Furjē transformācijas (IEFT) izteiksme

$$s(t) = \tilde{F}^{-1}[S(\omega_g), g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g, \quad (3.42)$$

ko var iegūt no (3.33) robežgadījumā, kad  $\Theta$  tiecas uz bezgalību, un ņemot vērā, ka  $c_n = S(n2\pi/\Phi(\Theta))/\Phi(\Theta)$  un  $\lim_{\Theta \rightarrow \infty} (2\pi/\Phi(\Theta)) = d\omega_g$ :

$$s(t) = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi(\Theta)} S\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)}\right) e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g. \quad (3.43)$$

Ja  $g(t) = 1$ , tad EFT un IEFT sakrīt ar tiešās un apgrieztās Furjē transformācijas klasiskajām izteiksmēm.

EFT piemīt vairākas ar klasisko Furjē transformāciju līdzīgas īpašības [51]. Piemēram, ja  $\tilde{F}[s(t), g(t)] = S(\omega_g)$ , tad  $\tilde{F}[s(t)e^{\mp jk\Phi(t)}, g(t)] = S(\omega_g \pm k)$ , vai arī – signālu reizinājuma  $s(t)x(t)$  EFT spektrs sakrīt ar šo signālu EFT spektru konvolūciju:

$$\tilde{F}[s(t)x(t), g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\eta_g) X(\omega_g - \eta_g) d\eta_g = \frac{1}{2\pi} S(\omega_g) * X(\omega_g). \quad (3.44)$$

Spektru reizinājumam

$$Y(\omega_g) = S(\omega_g) X(\omega_g) \quad (3.45)$$

savukārt atbilst paplašinātā konvolūcija laika apgabalā

$$y(t) = s(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{g(\tau)} x(\Phi^{-1}(\Phi(t) - \Phi(\tau))) d\tau, \quad (3.46)$$

kur  $\Phi^{-1}(\cdot)$  apzīmē funkcijas  $\Phi(t)$  inverso funkciju [51].

Kā piemēru EFT aprēķinam var apskatīt signālu  $x(t) = \cos(\psi(t))$ , kura frekvence  $\psi'(t)/(2\pi) > 0$ . Izvēloties funkciju  $g(t) = 1/\psi'(t)$ , signāla EFT ir:

$$\begin{aligned} X(\omega_g) &= \tilde{F}[x(t), g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\psi(t)) \psi'(t) e^{-j\omega_g \psi(t)} dt = [u = \psi(t), du = \psi'(t) dt] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u) e^{-j\omega_g u} du = \pi \delta(\omega_g - 1) + \pi \delta(\omega_g + 1). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pie citas  $g(t) \neq k/\psi'(t)$  funkcijas, kur  $k$  ir pozitīva konstante, signāla EFT spektrs vairs nebūs tik kompakts, bet gan izkļiedēts lielākā vai mazākā frekvenču joslā atkarībā no  $g(t)$ .

Kā piemēru IEFT aprēķinam var apskatīt filtru ar pārvades funkciju

$$H(\omega_g) = \tilde{F}[h(t), g(t)] = \begin{cases} 1, & \text{jā } |\omega_g| \leq \Omega_g \\ 0, & \text{citur.} \end{cases} \quad (3.48)$$

Filtra impulsa reakciju  $h(t)$  atrod ar IEFT:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_g}^{\Omega_g} e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g = \frac{\sin(\Omega_g \Phi(t))}{\pi \Phi(t)} = \frac{\Omega_g}{\pi} \text{sinc}(\Omega_g \Phi(t)). \quad (3.49)$$

Ja par filtra ieejas signālu izvēlas delta impulsu  $s(t) = \delta(t - t_0)$ , tad filtra izejā iegūst laika momentam  $t_0$  atbilstošo filtra impulsa reakciju  $h(t, t_0)$ , ko, ievērojot (3.46), atrod:

$$\begin{aligned} h(t, t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau - t_0)}{g(\tau)} h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - \Phi(\tau))) d\tau = \left[ \begin{array}{l} u = \Phi(\tau), du = \Phi'(\tau) d\tau \\ \tau = \Phi^{-1}(u) \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Phi^{-1}(u) - t_0) h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - u)) du = h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - \Phi(t_0))) = \\ &= \frac{\Omega_g}{\pi} \text{sinc}(\Omega_g(\Phi(t) - \Phi(t_0))). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Iegūtā *sinc* funkcija  $\text{sinc}(\Omega_g(\Phi(t) - \Phi(t_0)))$ , ja  $\Omega_g = 1$ , sakrīt ar iepriekš atrasto funkciju (3.18).

### 3.4. Paplašinātā nolašu teorēma

Izmantojot EFT, var pierādīt paplašināto nolašu teorēmu signāliem ar ierobežotiem EFT spektriem [II].

**Teorēmas formulējums:** jebkurš frekvenču joslā līdz  $\Omega_g$  ierobežots signāls  $s(t)$ , kura EFT spektrs  $S(\omega_g) = \tilde{F}[s(t), g(t)] = 0$ , ja  $|\omega_g| > \Omega_g$ , ir pilnībā determinēts, ja uzdotas tā vērtības laika momentos  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$  ar soli  $Y \leq \pi/\Omega_g$ .

Signāla atjaunošanas formula:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{Y}(\Phi(t) - \Phi(t_n))\right). \quad (3.51)$$

**Teorēmas pierādījums.** Diskrēta signāla  $s(t_n)$  reprezentācijai, izmantojot nepārtraukto laiku, lieto izteiksmi

$$s_d(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n). \quad (3.52)$$

Ja laika momentus  $t_n$  izvēlas atbilstoši vienādībai  $\Phi(t_n) = nY$ ,  $Y > 0$ , t.i.,

$$t_n = \Phi^{-1}(nY), \quad (3.53)$$

tad delta impulsu secību var ekvivalenti rakstīt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Phi(t) - \Phi(t_n)). \quad (3.54)$$

Apzīmējot  $\Phi(t) = u$ , iegūst periodisku impulsu virkni  $\sum_{n \in Z} \delta(u - nY)$  ar periodu  $Y$ , kuru var izteikt ar Furjē rindu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - nY) = \frac{1}{Y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{Y}u}. \quad (3.55)$$

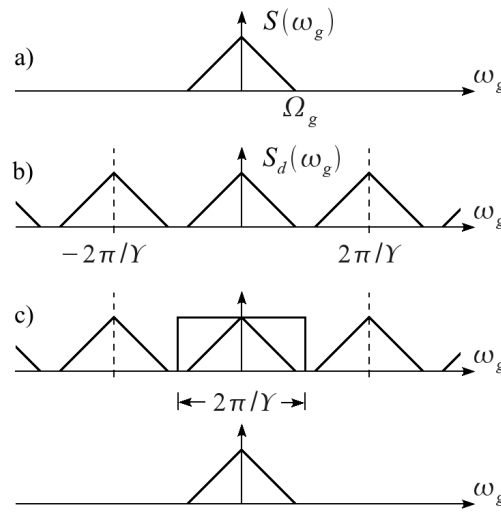
No (3.52), (3.54) un (3.55), liekot  $u = \Phi(t)$ , seko

$$s_d(t) = \frac{1}{Y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t) e^{jn \frac{2\pi}{Y} \Phi(t)}. \quad (3.56)$$

Tālāk atrod  $s_d(t)$  EFT spektru, izvēloties  $g(t) = 1/\Phi'(t)$  un ievērojot EFT īpašību: ja  $\tilde{F}[s(t), g(t)] = S(\omega_g)$ , tad  $\tilde{F}[s(t)e^{\mp jk\Phi(t)}, g(t)] = S(\omega_g \pm k)$ :

$$S_d(\omega_g) = \frac{1}{Y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega_g - n \frac{2\pi}{Y}). \quad (3.57)$$

Tātad diskrēta signāla EFT spektrs ir periodisks, tā atkārtošanās periods ir  $2\pi/Y$ , un to veido ar soli  $2\pi/Y$  nobīdītu analogā signāla  $s(t)$  EFT spektru bezgalīga summa (3.9. attēls).



3.9. att. Paplašinātās nolašu teorēmas interpretācija frekvenču apgabalā: a) analogā signāla EFT spektrs, b) diskrētā signāla EFT spektrs, c) diskrētā signāla filtrācija ar ideālu zemo frekvenču filtru analogā signāla atjaunošanai

No (3.57) un 3.9. attēla izriet, ja analogā signāla EFT spektrs  $S(\omega_g)$  ir ierobežots frekvenču joslā  $[-\Omega_g, \Omega_g]$ , tad diskrētā signāla periodiskais spektrs  $S_d(\omega_g)$  nepārklāsies, ja

$$Y \leq \pi/\Omega_g. \quad (3.58)$$

Izpildoties nevienādībai (3.58), un izvēloties filtru ar pārvades funkciju

$$H(\omega_g) = \begin{cases} Y, & \text{jā } |\omega_g| \leq \pi/Y \\ 0, & \text{citur,} \end{cases} \quad (3.59)$$

analogā signāla EFT spektru iegūst:

$$S(\omega_g) = S_d(\omega_g)H(\omega_g). \quad (3.60)$$

Reizinājumam frekvenču apgabalā atbilst konvolūcija (3.46) laika apgabalā, tāpēc

$$s(t) = s_d(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_d(\tau)}{g(\tau)} h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - \Phi(\tau))) d\tau, \quad (3.61)$$

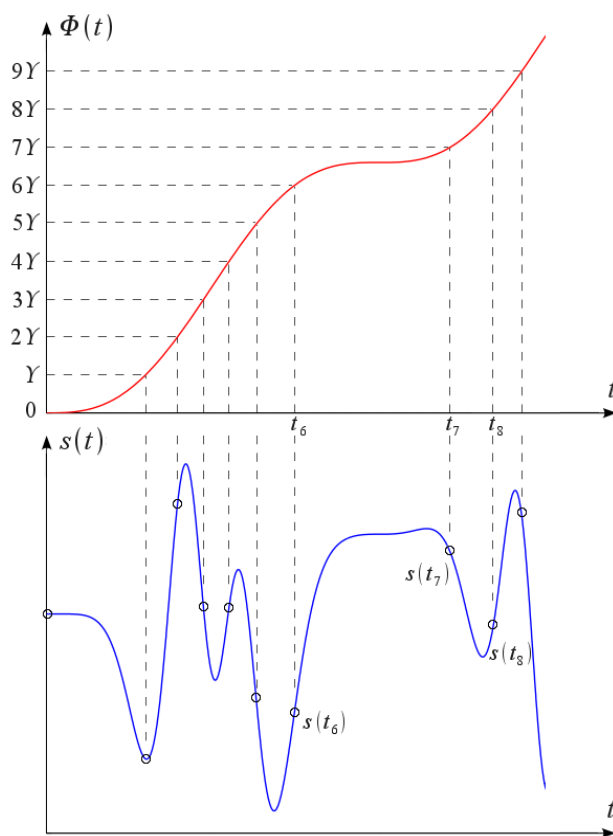
kur  $g(t) = 1/\Phi'(t)$  un  $h(t) = \tilde{F}^{-1}[H(\omega_g), g(t)] = \text{sinc}(\pi\Phi(t)/Y)$ . No (3.52), (3.54) un (3.61)

iegūst

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(\tau - t_n)}{g(\tau)} h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - \Phi(\tau))) d\tau = \left[ \begin{array}{l} u = \Phi(\tau), \quad du = \Phi'(\tau) d\tau \\ \tau = \Phi^{-1}(u) \end{array} \right] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\Phi^{-1}(u)) \delta(\Phi^{-1}(u) - t_n) h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - u)) du = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) h(\Phi^{-1}(\Phi(t) - \Phi(t_n))) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{Y}(\Phi(t) - \Phi(t_n))\right),
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

kas sakrīt ar (3.51).

Signāla  $s(t)$  diskretizācijas piemērs atkarībā no  $\Phi(t)$  laika momentos  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$  parādīts 3.10. attēlā – jo straujāk aug  $\Phi(t)$ , jo mazāki ir laika intervāli starp secīgām nolasēm.



3.10. att. Signāla  $s(t)$  diskretizācija atkarībā no  $\Phi(t)$  – nolašu  $s(t_n)$  laika momenti  $t_n$  atbilst

$\Phi(t)$  un līmeņu  $nY$ ,  $n \in Z$ , šķērsojumu vietām, t.i.,  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$

**Piemērs.** Ierobežota garuma  $|n| \leq N$  paplašinātās Furjē rindas (3.33) signāla

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \tag{3.63}$$

EFT spektrs, ja  $g(t) = 1/\Phi'(t)$ , ir:

$$X(\omega_g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt = \sum_{n=-N}^N 2\pi c_n \delta\left(\omega_g - n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)}\right). \tag{3.64}$$

Tātad signāls ir ierobežots frekvenču joslā  $\omega_g \in [-2\pi N/\Phi(\Theta), 2\pi N/\Phi(\Theta)]$ , un to pilnībā reprezentē nolases  $x(t_n)$  saskaņā ar izteiksmi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{Y}(\Phi(t) - \Phi(t_n))\right), \quad (3.65)$$

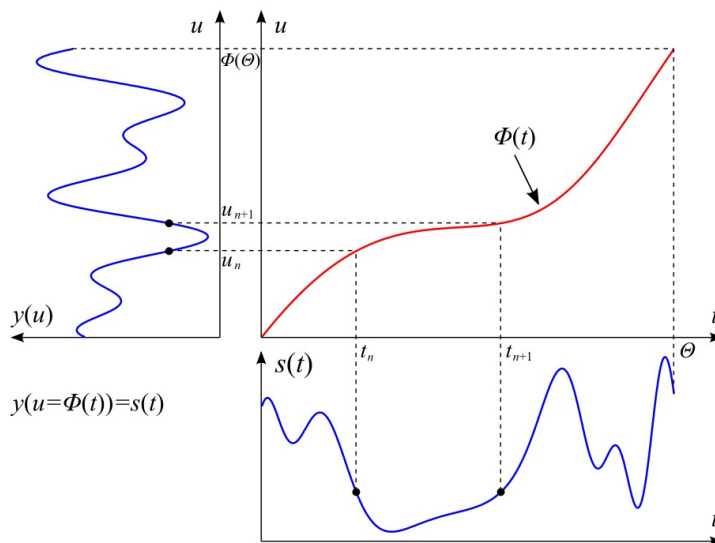
kur  $Y = \Phi(\Theta)/(2N)$  un  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$ .

Ja signāla EFT spektrs ir frekvenču joslā neierobežots, tad signālu pirms diskretizācijas filtrē ar funkcijai (3.48) atbilstošo filtru, lai novērstu diskretā signāla periodizētā spektra pārklāšanos. Rezultātā diskretizēta tiek signāla  $s(t)$  aproksimācija

$$\hat{s}(t) = 1/(2\pi) \int_{-\Omega_g}^{\Omega_g} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g. \quad (3.66)$$

### 3.5. Transformēta laika signāli

Iepriekš ar izteiksmi (3.27) definēto funkciju  $\Phi(t)$  var izmantot signālu  $s(t)$  transformācijai, kā tas parādīts 3.11. attēlā.



3.11. att. Signāla  $s(t)$  transformēta laika  $u = \Phi(t)$  signāls  $y(u)$

Transformācijas rezultātā iegūst signālam  $s(t)$  atbilstošo transformēta laika signālu  $y(u)$ , kura vērtība  $y(u_n)$  pie argumenta  $u_n = \Phi(t_n)$  sakrīt ar  $s(t_n)$ , tātad  $y(\Phi(t)) = s(t)$  un  $y(u) = s(\Phi^{-1}(u))$ .

No 3.11. attēla var secināt:

- 1) Galīga garuma signālu  $y(u)$ ,  $u \in [0, \Phi(\Theta)]$ , var izvērst klasiskajā Furjē rindā

$$y(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u}, \quad \text{kur } c_n = \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Phi(\Theta)} y(u) e^{-jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u} du. \quad (3.67)$$

Liekot argumenta  $u$  vietā  $u = \Phi(t)$ , un ievērojot, ka  $y(\Phi(t)) = s(t)$  un  $\Phi'(t) = 1/g(t)$ , no (3.67) iegūst paplašinātās Furjē rindas izteiksmes (3.33) un (3.34).

- 2) Līdzīgā veidā no signāla  $y(u)$  Furjē transformācijām  $Y(\eta) = F[y(u)]$  un  $y(u) = F^{-1}[Y(\eta)]$  iegūst EFT izteiksmes (3.41) un (3.42):

$$\begin{aligned} Y(\eta) = F[y(u)] &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j\eta u} du = \left[ \begin{array}{l} u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = (1/g(t)) dt \\ y(\Phi(t)) = s(t), \eta = \omega_g \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt = \tilde{F}[s(t), g(t)] = S(\omega_g), \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} y(u) = F^{-1}[Y(\eta)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\eta) e^{j\eta u} d\eta = \left[ \begin{array}{l} u = \Phi(t), t = \Phi^{-1}(u) \\ \eta = \omega_g, Y(\eta) = S(\omega_g), d\eta = d\omega_g \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g = \tilde{F}^{-1}[S(\omega_g), g(t)] = s(\Phi^{-1}(u)). \end{aligned} \quad (3.69)$$

No signāla  $y(u)$  FT īpašībām izriet arī  $s(t)$  EFT īpašības.

- 3) Ja signāla  $y(u)$  FT spektrs ir frekvenču joslā ierobežots:  $Y(\eta) = 0$ , ja  $Y(\eta) > \Omega_g$ , tad šo signālu pilnībā reprezentē nolases  $y(nY)$  saskaņā ar izteiksmi

$$y(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nY) \text{sinc}(\pi u / Y - n\pi), \quad (3.70)$$

kur  $Y \leq \pi / \Omega_g$ . Atkal, liekot argumenta  $u$  vietā  $u = \Phi(t)$ , un ievērojot vienādības  $y(\Phi(t)) = s(t)$  un  $\Phi'(t) = 1/g(t)$ , no signāla  $y(u)$  klasiskās nolašu teorēmas iegūst signāla  $s(t)$  paplašināto nolašu teorēmu (3.51). Līdzīgs rezultāts saistība ar transformēta laika signāliem un signālu atjaunošanu no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm iegūts darbā [19].

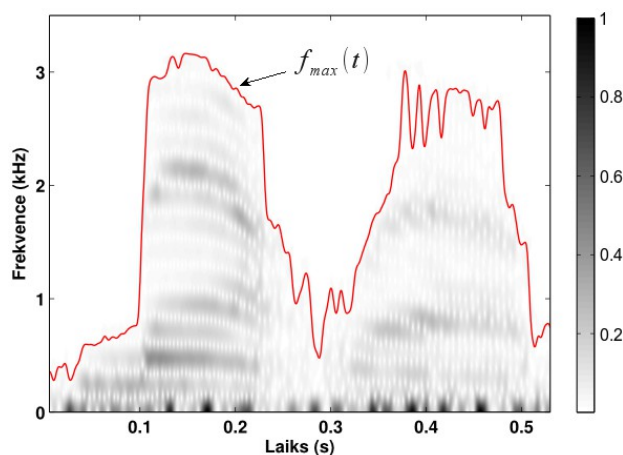
Kā izriet no dotajiem trīs piemēriem, tad uz signālu  $y(u)$  attiecināmie klasiskās signālapstrādes paņēmieni ar funkcijas  $\Phi(t)$  pārveidojumu pārvēršas par signāla  $s(t)$  paplašināto apstrādi.

### 3.6. No laikā mainīga spektrālā sastāva atkarīga signālu diskretizācija

No reālās pasaules iegūtie signāli bieži vien ir nestacionāri ar laikā mainīgām frekvenču īpašībām, kuru noteikšanai izmanto dažādas laika-frekvences analīzes metodes. Viena no populārākajām ir īsintervāla Furjē transformācija (STFT), kurai pamatā ir signāla  $s(\tau)$  īsu fragmentu  $s(\tau)u(\tau-t)$  spektru aprēķins laika momentos  $t$  saskaņā ar izteiksmi

$$S(t, f) = \int_{t-\Theta/2}^{t+\Theta/2} s(\tau) u(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (3.71)$$

kur  $u(\tau)$  ir ierobežota garuma loga funkcija ar vērtībām  $u(\tau)=0$ , ja  $|\tau|>\Theta/2$ . Dažādiem  $t$  iegūtie spektri nestacionāram signālam var atšķirties, līdz ar to dažādi var būt arī šo spektru joslu platumi  $f_{max}(t)$ , kuriem pie izvēlētajā sliekšņa  $d>0$  vērtības izpildās nevienādības:  $|S(t, f)|\geq d$ , ja  $|f|\leq f_{max}(t)$ , un  $|S(t, f)|< d$ , ja  $|f|> f_{max}(t)$ . Funkcijas  $f_{max}(t)$  piemērs, kas atbilst runas signāla laika-frekvences sadalījumam  $S(t, f)$ , ja  $d=0.05$  parādīts 3.12. attēlā.

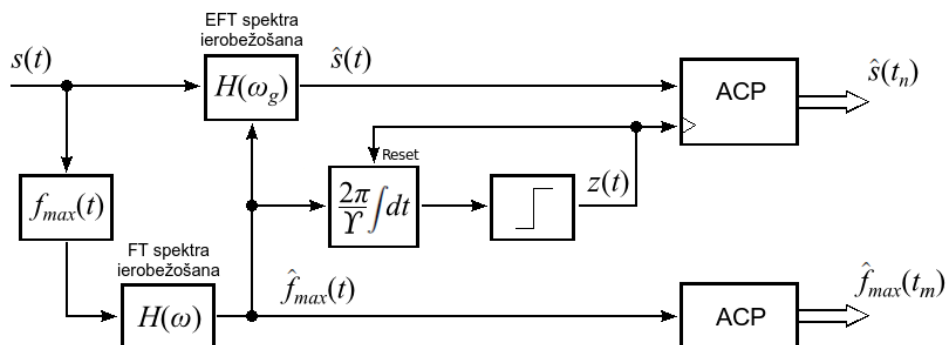


3.12. att. Runas signāla laika-frekvences sadalījums  $S(t, f)$  un no tā iegūtā maksimālā momentānā frekvence  $f_{max}(t)$

Lai funkciju  $f_{max}(t)$ , ko turpmāk saucim par signāla maksimālo momentāno frekvenci, ņemtu vērā pie signālu signālatkarīgas diskretizācijas atbilstoši pieejai – jo lielāka frekvence  $f_{max}(t)$ , jo mazāks diskretizācijas solis, tad saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu izmantosim ideju par signālu diskretizāciju atkarībā no funkcijas  $\Phi(t)$ , kuru šajā gadījumā atradīsim:

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^t f_{max}(\tau) d\tau = \int_0^t \omega_{max}(\tau) d\tau, \quad (3.72)$$

bet signāla nolases ņemsim laika momentos  $t_n = \Phi^{-1}(n\gamma)$  ar soli  $\gamma$ , ko noteiks signāla EFT spektra joslas platumi pie funkcijas  $g(t) = 1/\omega_{max}(t)$ . Šādas diskretizācijas blokshēma parādīta 3.13. attēlā.



3.13. att. No laikā mainīga spektrālā sastāva atkarīga signālu  $s(t)$  pārveidošana ciparu formā

Attēlā bloka  $f_{max}(t)$  izejas signāls ir ieejas signāla  $s(t)$  maksimālā momentānā frekvence, kuru filtrē ar zemo frekvenču filtru un tālāk izmanto signāla  $s(t)$  EFT spektra ierobežošanai joslā  $\omega_g \in [-\Omega_g, \Omega_g]$  un laika momentu  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$  iegūšanai sekojošā veidā: komparatora ieejai tiek pieslēgts integratora izejas signāls  $\Phi(t)/Y$ , kuram sasniedzot vērtību  $\Phi(t_n)/Y=1$ , komparatora izejas signāls  $z(t)$  pārslēdzas no zemā uz augsto līmeni un pēc nelielas aiztures  $\tau \ll t_{n+1} - t_n$  uzstāda integratora izeju uz  $\Phi(t_n + \tau)/Y=0$ , kam seko  $z(t)$  vērtības maiņa no augstā uz zemo līmeni. Rezultātā iegūts tiek komparatora izejas signāls  $z(t)$  ar pozitīvām pārslēgumu vietām laika momentos  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$ , kuru izmanto ACP taktēšanai signāla  $\hat{s}(t)$  nolašu  $\hat{s}(t_n)$  iegūšanai. Vienlaicīgi ar vienmērīgu soli diskretizēta tiek pati funkcija  $\hat{f}_{max}(t)$ , kas ir nepieciešama  $\hat{s}(t)$  atjaunošanai saskaņā ar interpolācijas izteiksmi (3.51), līdz ar to informāciju par signālu  $\hat{s}(t)$  pēc pārveidošanas satur nolašu  $\hat{s}(t_n)$  un  $\hat{f}_{max}(t_m)$  kvantētās vērtības. Kā vēlāk kļūs redzams 3.6.2. apakšnodaļā, tad atkarībā no  $\hat{f}_{max}(t)$  FT spektra platuma kopējais nolašu daudzums signālatkarīgās diskretizācijas gadījumā var pieaugt vai samazināties salīdzinājumā ar vienmērīgo diskretizāciju.

### 3.6.1. Signāla maksimālās momentānās frekvences noteikšana

Lai signālu diskretizētu saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu, uzdevums ir atrast tādu  $g(t)$  funkciju, pie kuras signāla EFT spektrs būtu frekvenču joslā ierobežots. Ja šāda funkcija neeksistē, vai nav zināms, kā to atrast, tad ierobežota garuma  $t \in [0, \Theta]$  signālam  $s(t)$  optimālais risinājums varētu būt sekojošs. Izmantojot paplašināto Furjē rindu (3.33) un koeficientu  $c_n$  vietā liekot (3.34), signāla  $s(t)$  aproksimāciju iegūst:

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} = \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(\tau)}{g(\tau)} e^{-jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(\tau)} d\tau \right) e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)}. \quad (3.73)$$

Ņemot vērā, ka  $\hat{s}(t)$  EFT spektrs, ja  $g(t) = 1/\Phi'(t)$ , ir joslā  $\omega_g \in [-2\pi N/\Phi(\Theta), 2\pi N/\Phi(\Theta)]$  ierobežots, tad to precīzi reprezentē nolases  $\hat{s}(t_n)$ , kas ņemtas ar soli  $Y = \Phi(\Theta)/(2N)$  laika momentos  $t_n = \Phi^{-1}(nY)$ , līdz ar to viena perioda  $t \in [0, \Theta]$  laikā iegūst  $2N + 1$  nolases. Izvēloties citu  $\Phi(t)$  funkciju, kurai  $\Phi(\Theta)$  vērtība paliek tā pati, iegūst jaunu  $s(t)$  aproksimāciju (3.73), kuru līdzīgi kā iepriekš reprezentē  $2N + 1$  nolases. Optimālo funkciju līdz ar to varētu atrast, atrisinot minimizācijas uzdevumu

$$\int_0^{\Theta} \left( s(t) - \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(\tau)}{g(\tau)} e^{-jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(\tau)} d\tau \right) e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \right)^2 dt = \min \quad (3.74)$$

visām tām  $\Phi(t)$  funkcijām, kurām  $\Phi(\Theta)$  vērtības ir vienādas.

Skaitlisks uzdevuma (3.74) atrisinājums ir visai laikietilpīgs, tāpēc signāla maksimālo momentāno frekvenci mēģināsim novērtēt ar citiem paņēmieniem, bet pirms tam definēsim  $f_{max}(t)$  izteiksmi signāliem, kas sastāv no svārstībām ar laikā mainīgām frekvencēm.

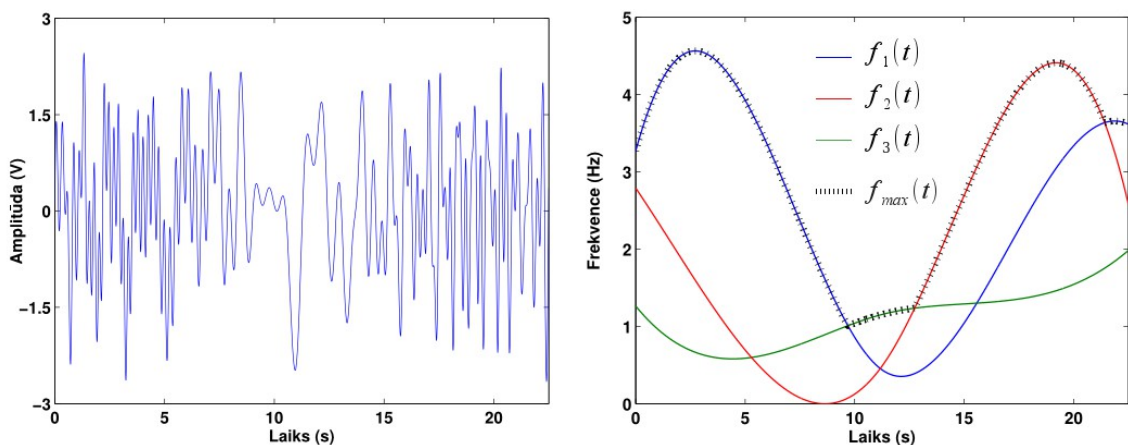
Par signāla

$$s(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(\psi_m(t)), \quad (3.75)$$

kur  $A_m$  un  $f_m(t) = \psi'_m(t) / (2\pi) > 0$  ir svārstību amplitūdas un frekvences, maksimālo momentāno frekvenci saucim funkciju  $f_{max}(t)$ , kuras vērtība brīvi izvēlēta laika momentā  $t = \tau$  ir

$$f_{max}(\tau) = \max(f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_M(\tau)). \quad (3.76)$$

Šādas funkcijas piemērs signālam, kas sastāv no  $M=3$  svārstībām, parādīts 3.14. attēlā. Kā vēlāk kļūs redzams 3.6.2. apakšnodaļā, tad tieši šī funkcija no visiem maksimālās momentānās frekvences novērtējumiem izteiksmes (3.75) signāliem dos vislabāko aproksimācijas rezultātu.



3.14. att. Signāls un to veidojošo triju svārstību frekvenču funkcijas  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  un  $f_3(t)$ , un no tām iegūtā signāla maksimālā momentānā frekvence  $f_{max}(t)$

No definīcijas (3.76) arī izriet, ka signāla  $x(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(k_m \psi(t))$ , kur  $k_1 < \dots < k_M$  ir pozitīvi koeficienti, frekvence  $f_{max}(t)$  sakrīt ar augstākās svārstības  $A_M \cos(k_M \psi(t))$  momentāno frekvenci, bet signāla EFT spektrs pie funkcijas  $1/g(t) = k_M \psi'(t)$  ir frekvenču joslā  $\omega_g \in [-1, 1]$  ierobežots:

$$X(\omega_g) = \tilde{F}[x(t), g(t)] = \sum_{m=1}^M A_m \pi \left( \delta\left(\omega_g + \frac{k_m}{k_M}\right) + \delta\left(\omega_g - \frac{k_m}{k_M}\right) \right). \quad (3.77)$$

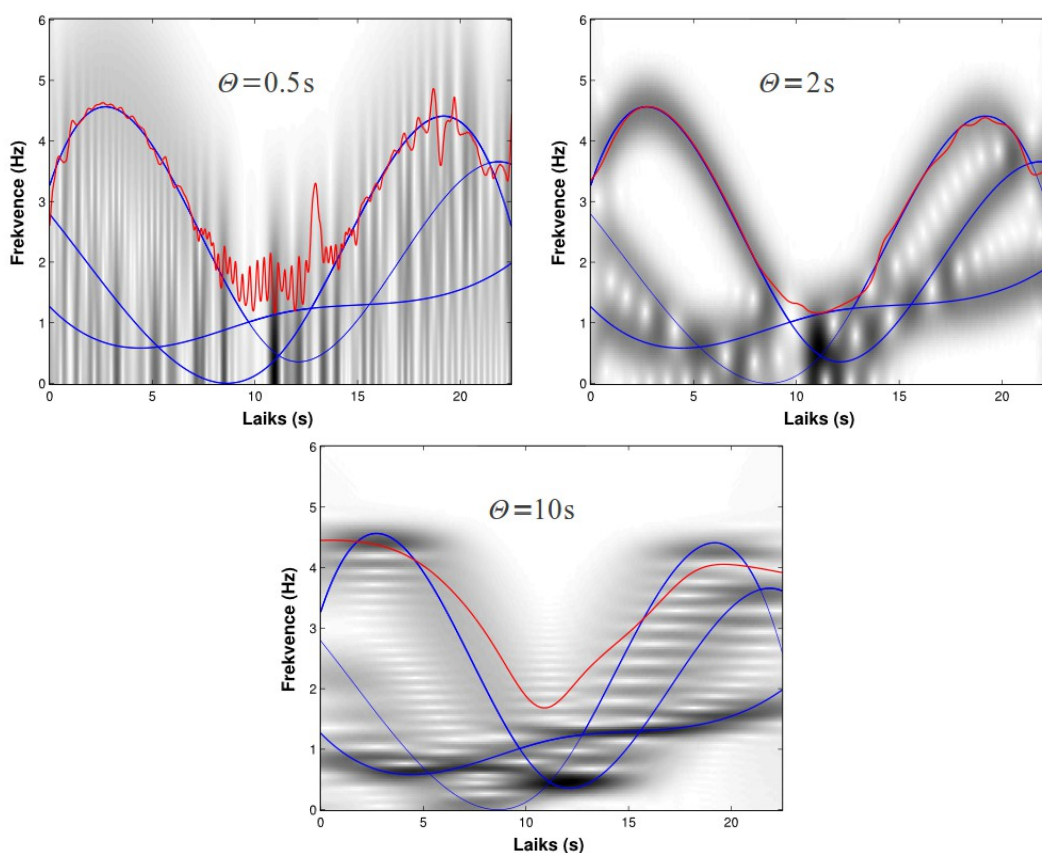
Ja signāla (3.75) frekvences  $f_m(t)$  nav zināmas, vai arī tas atšķiras no (3.75), tad  $f_{max}(t)$  novērtēšanai izmantosim tālāk aprakstītās metodes.

**Pirmā – STFT metode.** Par signāla laikā mainīgām frekvenču īpašībām var spriest pēc tā laika-frekvences sadalījuma, ko iegūt var ar dažādām laika-frekvences analīzes metodēm. Biežāk lietotās ir īsintervāla Furjē transformācija (STFT), Vīgnera-Villes sadalījums un vilnišu (*wavelet*) transformācija, kurām katrai piemīt savas priekšrocības un trūkumi [1], [21].

STFT gadījumā signāla  $s(t)$  laika-frekvences sadalījumu  $S(t, f)$  nosaka izteiksme (3.71), un iegūtais rezultāts ir atkarīgs no loga  $u(t)$  izvēles. STFT rezultāts 3.14. attēlā dotajam signālam pie trīs dažādiem Heminga loga

$$u(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(2\pi t/\Theta), & \text{ja } |t| \leq \Theta/2 \\ 0, & \text{ja } |t| > \Theta/2 \end{cases} \quad (3.78)$$

garumiem  $\Theta$  parādīts 3.15. attēlā. Kā redzams, tad īsākam logam atbilst sliktāka frekvenču izšķirtspēja, bet garākam logam – laika izšķirtspēja.



3.15. att. No signāla STFT sadalījuma atrastās  $\hat{f}_{max}(t)$  funkcijas (sarkanās līnijas) pie logu garumiem 0.5, 2 un 10 sekundes

Balstoties uz STFT analīzi, signāla  $s(t)$  maksimālās momentānās frekvences novērtējumu  $\hat{f}_{max}(t)$  atradīsim saskaņā ar algoritmu:

$$\begin{aligned}
 S_i(t, f) &= \int_{t-\Theta/2}^{t+\Theta/2} s_i(\tau) u(\tau-t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau; \\
 f_i(t) &= \frac{\int 2\pi f |S_i(t, f)|^2 df}{\int |S_i(t, f)|^2 df}, \quad \Phi_i(t) = 2\pi \int_0^{\Theta_s} f_i(\tau) d\tau; \\
 \hat{s}_i(t) &= \sum_{n=-N_i}^{N_i} c_{in} e^{jn \frac{2\pi}{\Phi_i(\Theta_s)} \Phi_i(t)}, \quad N_i = \lfloor \Phi_i(\Theta_s) / (2\pi) \rfloor; \\
 s_{i+1}(t) &= s(t) - \hat{s}_i(t),
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

kur  $i \geq 0$  apzīmē iterācijas numuru,  $s_0(t) = s(t)$ ,  $f_i(t)$  ir nosacītā vidējā frekvence (CMF: conditional mean frequency) [21],  $\hat{s}_i(t)$  ir frekvenču joslā  $\omega_g \in [-1, 1]$  ierobežota signāla  $s(t)$  EFS aproksimācija pie funkcijas  $g_i(t) = 1 / (2\pi f_i(t))$ , un  $\Theta_s$  ir signāla garums. Tātad katrā iterācijā tiek atrasta jauna funkcija  $f_i(t)$ , kuru izmanto signāla  $s(t)$  sadalīšanai divās daļās:  $\hat{s}_i(t)$  un  $s(t) - \hat{s}_i(t)$ , kas attiecīgi satur EFS frekvences  $|\omega_g| \leq 1$  un  $|\omega_g| > 1$ , līdz ar to funkcija  $f_i(t)$  atbilst augsto frekvenču daļai. Algoritma (3.79) izpildi pārtrauc, kad sasniegts tiek noteikts iterāciju skaits, vai arī starpības  $f_i(t) - f_{i-1}(t)$  enerģija kļūst pietiekami maza. Par signāla maksimālo momentāno frekvenci pieņem funkciju  $\hat{f}_{max}(t) = f_i(t)$ .

Ar algoritmu (3.79) pēc trīs iterācijām iegūtās funkcijas  $\hat{f}_{max}(t)$ , kas atbilst 3.14. attēlā dotajam signālam, parādītas 3.15. attēlā pie STFT logu garumiem  $\Theta = 0.5, 2$  un 10 sekundes.

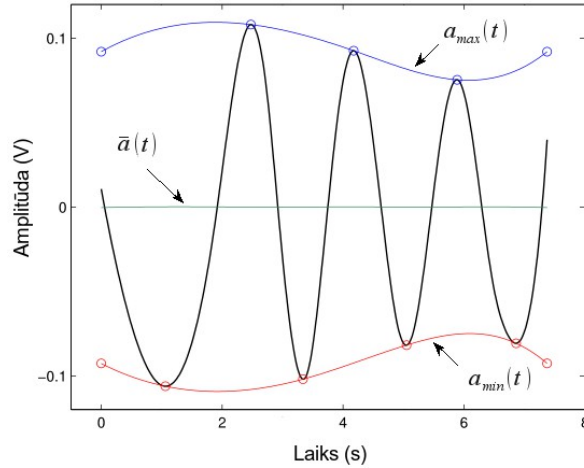
**Otrā metode – empīriskā dekompozīcija.** Saskaņā ar empīrisko dekompozīciju (EMD: Empirical Mode Decomposition) signālu  $s(t)$  sadala komponentēs atbilstoši izteiksmei

$$s(t) = \sum_{m=1}^M c_m(t) + r_M(t), \tag{3.80}$$

kur  $r_M(t)$  ir signāla atlikums, bet  $c_m(t)$  – EMD komponentes, kurām katrai piemīt divas īpašības [37], [93]:

- 1) ekstrēmu un nulles līmeņa šķērsojumu skaiti sakrīt vai atšķiras maksimāli par viens;
- 2) maksimumu un minimumu veidoto apliecēju  $a_{max}(t)$  un  $a_{min}(t)$  vidējā apliecēja  $\bar{a}(t) = (a_{max}(t) + a_{min}(t)) / 2 = 0$  (3.16. attēls).

Šo īpašību esamība garantē to, ka ar Hilberta transformāciju iegūtās EMD komponentu momentānās frekvences labi atbildīs šo komponentu patiesajām momentānajām frekvencēm [37].



3.16. att. EMD komponente ar vidējo apliecēju  $\bar{a}(t)=0$

EMD pamatā ir sekojošs algoritms:

- 1) atrod signāla  $s(t)$  lokālos maksimumus un minimumus, kurus tālāk interpolē un iegūst augšējo un apakšējo apliecējas  $a_{max}(t)$  un  $a_{min}(t)$  (galapunktos interpolētas tiek maksimumu un minimumu vidējās vērtības, ja signāls ir attiecīgi mazāks vai lielāks par šīm vērtībām);
- 2) no signāla  $s(t)$  atņem vidējo apliecēju  $\bar{a}_1(t)=(a_{max}(t)+a_{min}(t))/2$  un iegūst starpības signālu  $s_1(t)=s(t)-\bar{a}_1(t)$ ;
- 3) aizstājot  $s(t)$  ar  $s_1(t)$ , soļus (1) un (2) atkārto vairākas reizes, līdz tiek iegūta pirmā komponente  $c_1(t)$ , kurai izpildās iepriekš nosauktās divas īpašības;
- 4) aizstājot  $s(t)$  ar atlikuma signālu  $r_1(t)=s(t)-c_1(t)$ , soļus (1), (2) un (3) atkārto tik reizes, līdz tiek iegūts noteikts komponentu skaits, vai arī atlikums  $r_n(t)$  kļūst pietiekami mazs vai monotons [93].

Rezultātā pēc dekompozīcijas signālu  $s(t)$  var izteikt ar summu (3.80), bet katru komponenti  $c_m(t)$  var rakstīt:

$$c_m(t)=a_m(t)\cos(\psi_m(t)), \quad (3.81)$$

kur  $a_m(t)>0$  ir lēni mainīga amplitūda. No (3.81) un (3.80) iegūst:

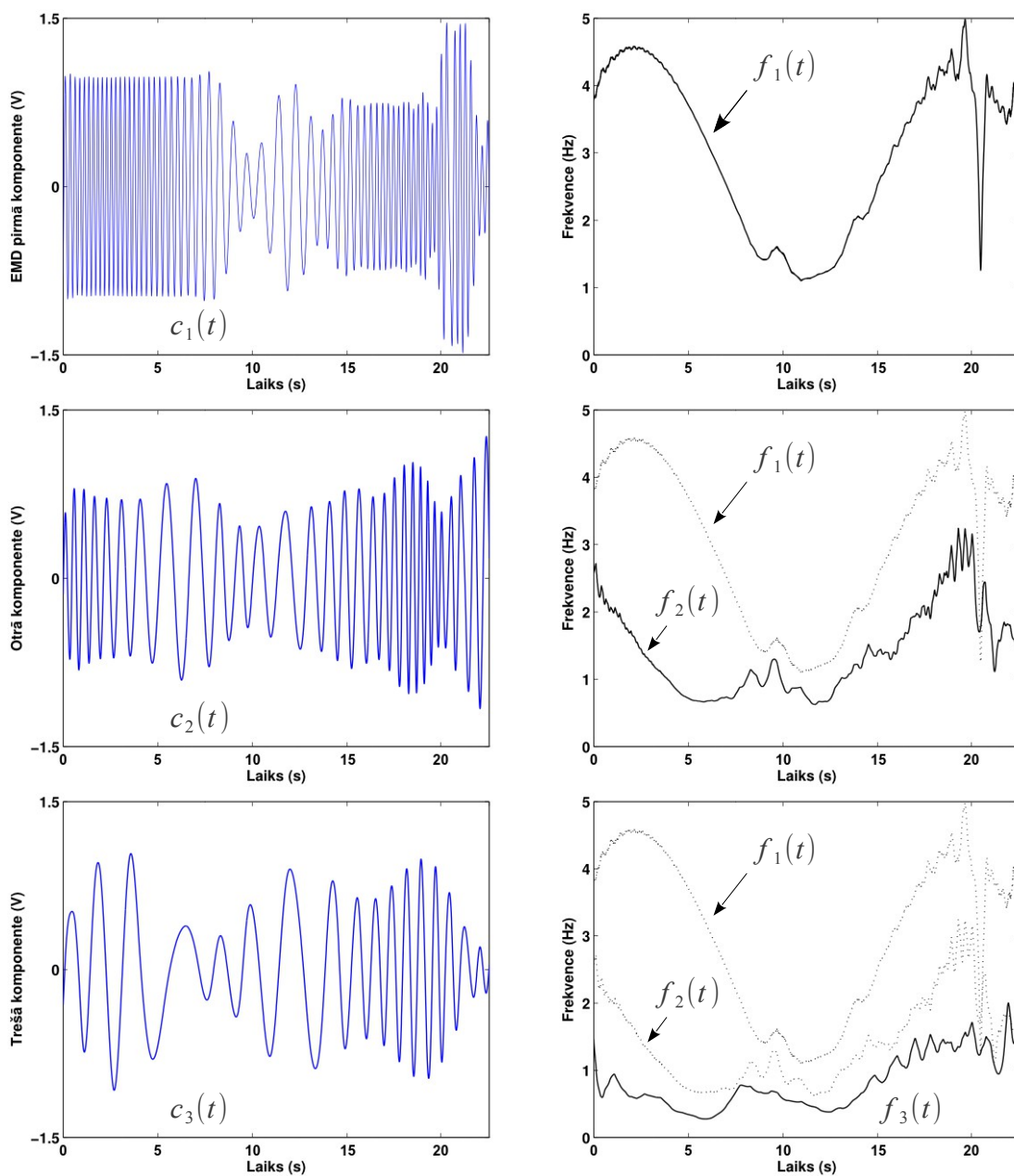
$$s(t)=\sum_{m=1}^M a_m(t)\cos(\psi_m(t))+r_M(t), \quad (3.82)$$

un pēc līdzības ar izteiksmes (3.75) signāliem par  $s(t)$  maksimālo momentāno frekvenci var uzskatīt funkciju  $\hat{f}_{max}(t)$ , kuras vērtība brīvi izvēlētā laika momentā  $t=\tau$  ir:

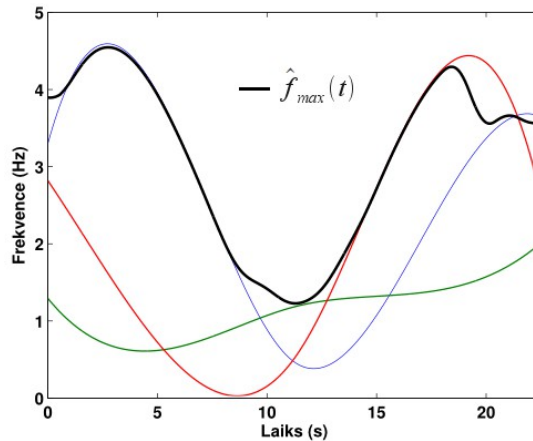
$$\hat{f}_{max}(\tau)=\max(f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_M(\tau)), \quad (3.83)$$

bet  $f_m(t)=\psi'_m(t)/(2\pi)$  ir komponentu  $c_m(t)$  momentānās frekvences, kuras atrod no  $c_m(t)$  Hilberta transformācijām.

3.14. attēlā dotā signāla pirmās trīs dekompozīcijas komponentes un to momentānās frekvences parādītas 3.17. attēlā.



3.17. att. EMD komponentes  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  un  $c_3(t)$  un to momentānās frekvences  
 Kā redzams, tad komponentu frekvences (nepārtrauktās līnijas), pieaugot to kārtas numuram, samazinās, līdz ar to par signāla maksimālo momentāno frekvenci varētu uzskatīt pirmās komponentes  $c_1(t)$  frekvenci  $f_1(t)$  [II], kuru nogludinot ar zemu frekvenču filtru, iegūst  $\hat{f}_{max}(t)$  (3.18. attēls).



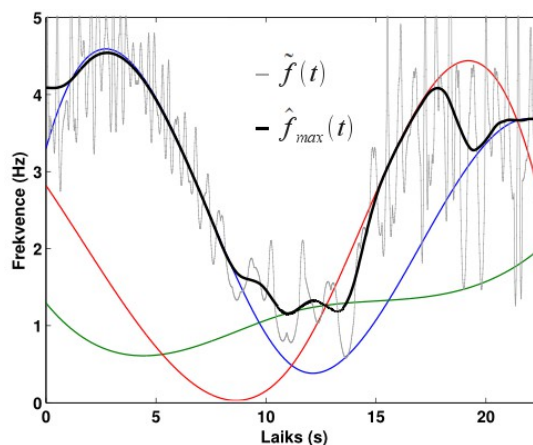
3.18. att. No signāla  $s(t)$  pirmās EMD komponentes  $c_1(t)$  iegūtā nogludinātā frekvence

$\hat{f}_{max}(t)$  un signālu  $s(t)$  veidojošo triju svārstību momentānās frekvences

**Trešā – ekstrēmu metode.** Līdzīgi EMD metodei signālu  $s(t)$  var sadalīt komponentēs atbilstoši izteiksmei (3.80) ar LMD (Local Mean Decomposition) metodi [75], [89], un katru iegūto komponenti var aprakstīt ar izteiksmi (3.81). Arī šajā gadījumā signāla maksimālo momentāno frekvenci varētu iegūt no pirmās LMD komponentes, kurai raksturīgs ir lokālo ekstrēmu laika pozīciju  $t_m$  tuvs izvietojums signāla ekstrēmu vietām  $t_n$ . Balstoties uz šo novērojumu, funkciju  $\hat{f}_{max}(t)$  atrod no  $t_n, n=0, 1, \dots, N-1$ :

- 1) aprēķina funkcijas  $\tilde{\Phi}(t)$  vērtības laika momentos  $t_n: \tilde{\Phi}(t_n) = n\pi$ , kuras tālāk interpolē ar Ermita kubiskajiem splainiem, lai iegūtu laikā nepārtrauktu funkciju  $\tilde{\Phi}(t)$ , kas ir monotoni augoša;
- 2) no  $\tilde{\Phi}(t)$  atrod svārstības  $\cos(\tilde{\Phi}(t))$ , kuras maksimumu un minimumu vietas sakrīt ar  $t_n$ , momentāno frekvenci  $\tilde{f}(t)$ , kuru tālāk nogludinot ar zemo frekvenču filtru, iegūst  $\hat{f}_{max}(t)$ .

Šādā veidā atrastā funkcija  $\hat{f}_{max}(t)$  3.14. attēlā dotajam signālam parādīta 3.19. attēlā.



3.19. att. No signāla  $s(t)$  lokālo ekstrēmu laika pozīcijām iegūtā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$

### 3.6.2. Diskretizācijas un atjaunošanas piemēri

Kad ir apskatīti signāla maksimālās momentānās frekvences novērtēšanas paņēmieni, veiksīm signālatkarīgās un vienmērīgās diskretizācijas nolašu skaita un atjaunošanas precizitātes salīdzinājumu vairākiem signāliem.

1. Ar iepriekš dotajām trīs metodēm atrod signāla  $s(t)$ ,  $t \in [0, \Theta]$  momentānās frekvences  $\hat{f}_{max1}(t)$ ,  $\hat{f}_{max2}(t)$  un  $\hat{f}_{max3}(t)$  un saskaņā ar (3.72) – funkcijas  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  un  $\Phi_3(t)$ , kā arī ceturto funkciju  $\Phi_4(t) = 2\pi t$ , kas atbilst vienmērīgās diskretizācijas gadījumam, kad  $\hat{f}_{max4}(t) = \text{const.} = 1 \text{ Hz}$ .

2. Aprēķina koeficientus  $k_i = \Phi_1(\Theta) / \Phi_i(\Theta)$ , kur  $i = 1, 2, 3, 4$ , un iepriekš atrastās funkcijas  $\hat{f}_{maxi}(t)$  un  $\Phi_i(t)$  aizstāj ar  $k_i \hat{f}_{maxi}(t)$  un  $k_i \Phi_i(t)$ . Rezultātā:

$$\Phi_1(\Theta) = \Phi_2(\Theta) = \Phi_3(\Theta) = \Phi_4(\Theta). \quad (3.84)$$

3. Zinot funkcijas  $1/g_i(t) = 2\pi \hat{f}_{maxi}(t)$ , aprēķina signālu  $s(t) / \sqrt{g_i(t)}$  enerģijas

$$E_i = \int_0^{\Theta} \frac{s^2(t)}{g_i(t)} dt, \quad (3.85)$$

no kurām seko normētie signāli  $s_i(t) = s(t) / \sqrt{E_i}$ .

4. No (3.34) atrod  $s_i(t)$  EFS koeficientus  $c_{in}$ ,  $|n| = 0, 1, 2, \dots, N$ , un atkarībā no  $N$ , ievērojot 5. pielikumā doto (P5.2) izteiksmi, iegūst signālu  $(s_i(t) - \hat{s}_i(t)) / \sqrt{g_i(t)}$  un  $s_i(t) / \sqrt{g_i(t)}$  enerģiju attiecības

$$r_i(N) = \frac{\int_0^{\Theta} \frac{1}{g_i(t)} (s_i(t) - \hat{s}_i(t))^2 dt}{\int_0^{\Theta} \frac{1}{g_i(t)} s_i^2(t) dt} = 1 - \Phi_i(\Theta) \sum_{n=-N}^N |c_{in}|^2, \quad (3.86)$$

kur

$$\hat{s}_i(t) = \sum_{n=-N}^N c_{in} e^{jn \frac{2\pi}{\Phi_i(\Theta)} \Phi_i(t)} \quad (3.87)$$

ir signāla  $s_i(t)$  ierobežota garuma EFS rindas aproksimācija. Tā kā izpildās (3.84), tad visiem signāliem  $\hat{s}_i(t)$  EFS frekvences  $n 2\pi / \Phi_i(\Theta)$  ir vienādas, un  $\hat{s}_i(t)$  EFT spektri pie funkcijām  $1/g_i(t)$  ir ierobežoti vienā frekvenču joslā  $[-2\pi N / \Phi_i(\Theta), 2\pi N / \Phi_i(\Theta)]$ .

5. No katras funkcijas  $r_i(N)$  atrod EFS koeficientu skaitu  $2N_i + 1$ , pie kura  $r_i(N_i) = \varepsilon$ . Tikpat liels nolašu skaits ir nepieciešams signāla  $\hat{s}_i(t)$  reprezentācijai saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu.

6. No  $2N_i + 1$  aprēķina attiecības

$$\Delta_i = \frac{(2N_4 + 1) - (2N_i + 1)}{2N_4 + 1} \cdot 100\% = \frac{N_4 - N_i}{N_4 + 1/2} \cdot 100\%, \quad (3.88)$$

kas parāda, cik procentuāli lielāks ( $\Delta_i > 0$ ) vai mazāks ( $\Delta_i < 0$ ) nolašu skaits signālatkarīgās diskretizācijas gadījumā ir nepieciešams vienlīdz precīzai analogo signālu  $s(t)$  diskrētai reprezentācijai salīdzinājumā ar vienmērīgo diskretizāciju.

7. Paralēli funkcijām  $\hat{f}_{max_1}(t)$ ,  $\hat{f}_{max_2}(t)$  un  $\hat{f}_{max_3}(t)$  visas minētās darbības izpilda arī frekvenču joslā  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$  ierobežotām funkcijām  $\tilde{f}_{max_1}(t)$ ,  $\tilde{f}_{max_2}(t)$  un  $\tilde{f}_{max_3}(t)$ , kuru reprezentācijai nepieciešamas  $M = \Omega \Theta / \pi + 1$  laikā vienmērīgi izvietotas nolases. Tā kā šīs funkcijas ir nepieciešamas pie signālu atjaunošanas, tad kopējais nolašu skaits signālatkarīgās pieejas gadījumā ir  $2\tilde{N}_i + M + 2$ , un attiecība

$$\tilde{\Delta}_i = \frac{(2\tilde{N}_4 + 1) - (2\tilde{N}_i + 1 + M)}{2\tilde{N}_4 + 1} \cdot 100\% = \frac{\tilde{N}_4 - \tilde{N}_i - M}{\tilde{N}_4 + 1/2} \cdot 100\%, \quad (3.89)$$

klūst mazāka salīdzinājumā ar (3.88).

Ar EMD metodēm iegūtie aproksimācijas rezultāti diviem izteiksmes

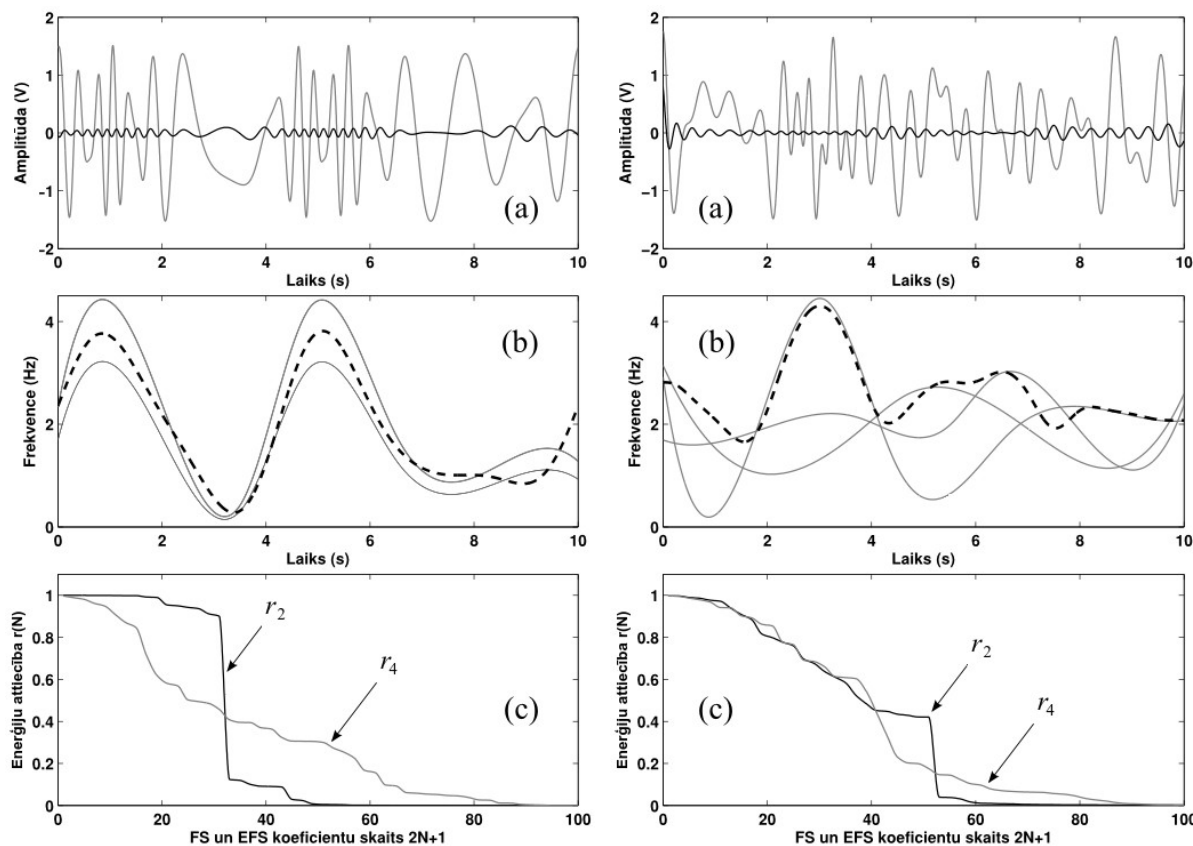
$$x(t) = \sum_{l=1}^L A_l \cos(\psi_l(t)) \quad (3.90)$$

signāliem, kuru amplitūdas  $A_l$  ir konstantas un frekvences  $f_l(t) = \psi'_l(t) / (2\pi) > 0$ , parādīti 3.20. attēlā – signāls pa kreisi sastāv no  $L=2$  svārstībām ar kārtām frekvencēm, bet pa labi – no 3 svārstībām ar atšķirīgām frekvencēm. Kā izriet no  $r_2(N)$  un  $r_4(N)$  līknēm, kas attiecīgi atbilst EMD un vienmērīgās diskretizācijas funkcijām  $\hat{f}_{max_2}(t)$  un  $\hat{f}_{max_4}(t)$ , tad signālatkarīgās pieejas gadījumā noteiktas precizitātes  $\varepsilon < 0.1$  aproksimācija tiek sasniegta pie mazāka EFS koeficientu skaita nekā FS gadījumā. Šī atšķirība klūst lielāka, ja palielinās brīvā laukuma  $\Delta S$  vērtība, ko aprēķina:

$$\Delta S = 1 - \frac{1}{f_{MAX} \Theta} \int_0^{\Theta} f_{max}(t) dt, \quad (3.91)$$

kur  $f_{MAX}$  ir funkcijas  $f_{max}(t)$ , kas definēta ar izteiksmi (3.76), maksimālā vērtība. To parāda 3.1. tabulā dotie vidējie rezultāti, kas iegūti pēc 100 izteiksmes (3.90) dažādu signālu analīzes četros gadījumos, ja  $L=1, 2, 3$  un  $5$ . Skaitļi  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$  un  $\Delta_3$  attiecīgi atbilst frekvencēm  $f_{max}(t)$  (zināma jau iepriekš),  $\hat{f}_{max_1}(t)$  (iegūta ar STFT metodi),  $\hat{f}_{max_2}(t)$  (iegūta ar EMD metodi) un  $\hat{f}_{max_3}(t)$  (iegūta ar ekstrēmu metodi). Kā izriet no tabulas, tad sarežģītākiem signāliem, kuriem lielāks  $L$ , signālatkarīgās pieejas priekšrocība samazinās, kas skaidrojams ar to, ka mazāka klūst atsevišķo svārstību  $A_l \cos(\psi_l(t))$  enerģija salīdzinājumā ar signāla  $x(t)$

pilno enerģiju.



3.20. att. Signālu  $x(t)$  aproksimācija ar EFS un FS rindām: a) signāli  $x(t)$  (pelēkās līnijas) un EFS aproksimācijas kļūdas signāli  $x(t) - \hat{x}(t)$  (melnās līnijas) pie  $\varepsilon = 0.005$ , b) ar EMD metodi iegūtās frekvences  $\hat{f}_{max 2}(t)$  (svītrlīnijas) un signāla patiesās (nepārtrauktās līnijas) frekvences, c) attiecību  $r_2(N)$  un  $r_4(N)$  atkarība no EFS un FS koeficientu skaita  $2N + 1$

3.1. tabula

EFS koeficientu skaita procentuāls samazinājums  $\Delta_i$  salīdzinājumā ar FS rindu, ja neņem vērā

funkciju  $\hat{f}_{max i}(t)$  nolašu skaitu  $M$

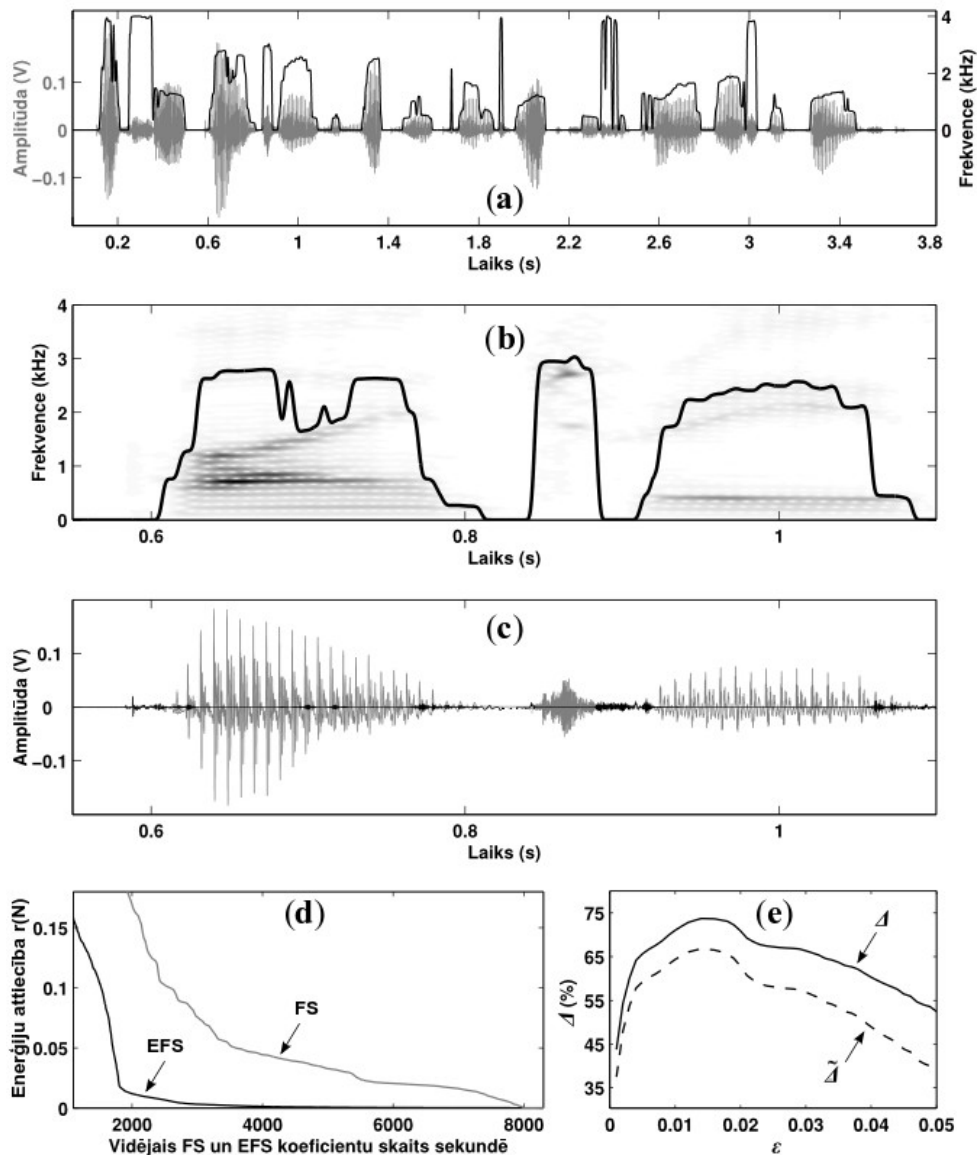
$L$	$\varepsilon = 0.05$				$\varepsilon = 0.02$				$\varepsilon = 0.01$				$\Delta S, \%$
	$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	
1	37	36	37	36	35	33	35	34	28	24	25	25	45
	53	51	53	52	48	48	50	48	36	33	36	35	59
2	24	21	25	24	21	18	20	19	14	12	13	11	34
	40	36	41	39	41	39	43	39	29	28	31	28	53
3	17	14	18	17	17	13	13	9	12	10	8	4	28
	32	27	33	31	36	32	36	30	22	19	21	17	53
5	11	9	11	7	11	7	5	1	5	3	1	-2	25
	17	12	19	13	28	25	27	19	12	12	11	4	53

EFS koeficientu skaita procentuāls samazinājums  $\tilde{\Delta}_i$  salīdzinājumā ar FS rindu, ja ņem vērā funkciju  $\tilde{f}_{max_i}(t)$  nolašu skaitu  $M$

$L$	$\varepsilon=0.05$				$\varepsilon=0.02$				$\varepsilon=0.01$				$\Delta S, \%$
	$\tilde{\Delta}_0$	$\tilde{\Delta}_1$	$\tilde{\Delta}_2$	$\tilde{\Delta}_3$	$\tilde{\Delta}_0$	$\tilde{\Delta}_1$	$\tilde{\Delta}_2$	$\tilde{\Delta}_3$	$\tilde{\Delta}_0$	$\tilde{\Delta}_1$	$\tilde{\Delta}_2$	$\tilde{\Delta}_3$	
1	23	22	23	23	19	18	19	18	10	10	10	10	45
	41	40	41	40	37	36	37	36	24	23	24	24	59
2	11	9	11	11	7	6	5	5	2	2	1	1	34
	27	24	27	26	30	28	30	30	20	18	19	18	53
3	4	2	2	1	4	2	0	-1	1	0	-2	-4	28
	17	13	17	16	24	21	22	21	13	9	10	9	53
5	0	-2	-2	-4	1	-2	-4	-6	-3	-5	-8	-8	25
	0	-5	-1	-4	18	15	14	11	4	2	1	-1	53

3.1. tabulā parādītie rezultāti atbilst gadījumam, kad funkcijas  $\hat{f}_{max_i}(t)$  uztvērēja daļā ir zināmas jau iepriekš, līdz ar to to pārraide nav nepieciešama. Ja šīs funkcijas nav zināmas, tad pie EFS koeficientu skaita pieskaita vēl  $M = \Omega \Theta / \pi + 1$  nolases, kas ir nepieciešamas frekvenču joslā  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$  ierobežotu funkciju  $\tilde{f}_{max_i}(t)$  atjaunošanai, lai tālāk veiktu signālu  $\hat{x}(t)$  atjaunošanu. Rezultātā iegūtās vidējās vērtības  $\tilde{\Delta}_i$ , ja  $\Omega = \pi$  un  $M = 11$ , parādītas 3.2. tabulā. Kā redzams, tad signālatkarīgās pieejas priekšrocība ir samazinājusies, un pie lielākiem  $L$  vairs nav izdevīga.

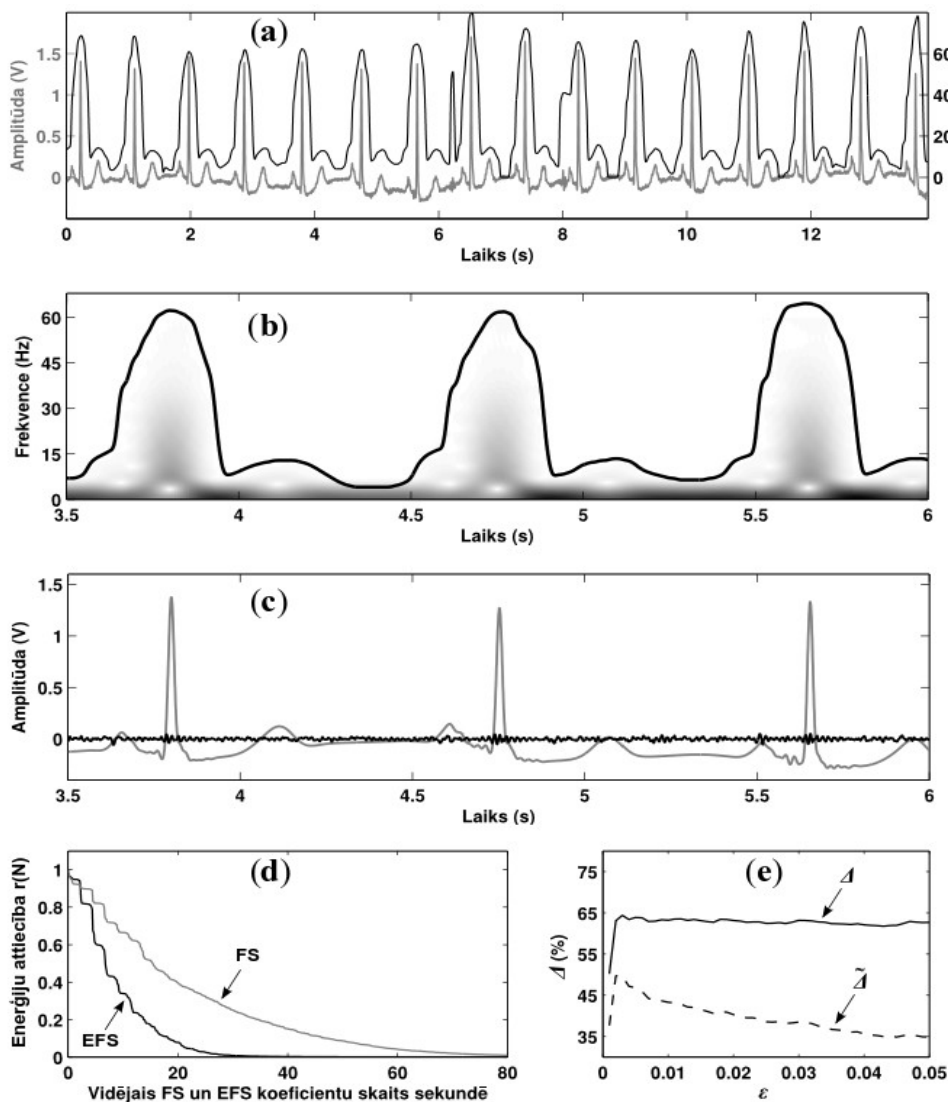
Kā nākamais piemērs ir apskatīts no TIMIT datubāzes (/timit/train/dr1/mtpf0/sx335.wav) ņemts 3.8 sekundes garš runas signāls (3.21. attēls), kura maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  iegūta ar STFT metodi, ja Heminga loga garums izvēlēts 20 ms, kas aptuveni sakrīt ar signāla kvazistacionaritātes intervālu [35]. Funkcijas  $\hat{f}_{max}(t)$  brīvā laukuma vērtība šajā gadījumā ir visai liela –  $\Delta S = 77\%$ , kas nosaka signālatkarīgās pieejas ievērojamu pārkumu salīdzinājumā ar klasisko Furjē rindu. To 3.21. attēlā parāda (d) un (e) līknes, no kurām (d) atbilst enerģiju attiecībai  $r(N)$  atkarībā no EFS un FS koeficientu skaita  $2N + 1$ , kas izdalīts ar signāla garumu, tādējādi iegūstot vidējo koeficientu (nolašu) skaitu sekundē, kas reprezentē signālu, savukārt (e) līknes parāda EFS koeficientu skaita procentuālu samazinājumu salīdzinājumā ar FS rindu pie vienādām enerģiju attiecībām  $\varepsilon$ . Līkne  $\tilde{\Delta}$  atbilst gadījumam, kad pie EFS koeficientu skaita pieskaita vēl joslā  $\omega \in [-500\pi, 500\pi]$  ierobežotas funkcijas  $\tilde{f}_{max}(t)$  nolašu skaitu  $M$ .



3.21. Runas signāla  $x(t)$  aproksimācija ar EFS un FS rindām: a) signāls  $x(t)$  un tā maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  (melnā līnija), b) signāla fragmenta STFT laika-frekvences sadalījums un no tā iegūtā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$ , c) ar EFS rindu aprēķinātā signāla aproksimācija  $\hat{x}(t)$  (pelēkā līnija) un kļūdas signāls  $x(t) - \hat{x}(t)$  (melnā līnija) pie  $\varepsilon = 0.002$ , d) attiecību  $r(N)$  atkarība no vidējā EFS un FS koeficientu skaita sekundē, e) EFS koeficientu skaita procentuālie samazinājumi  $\Delta$  un  $\tilde{\Delta}$  salīdzinājumā ar FS koeficientu skaitu pie vienādām  $\varepsilon$  vērtībām

Kā pēdējais piemērs ir apskatīts elektrokardiogrammas signāls (3.22. attēls), kura maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  iegūta ar STFT metodi, ja Heminga loga garums izvēlēts 300 ms. Funkcijas  $\hat{f}_{max}(t)$  brīvā laukuma vērtība šoreiz ir  $\Delta S = 68\%$ , un līkne  $\tilde{\Delta}$  ir iegūta, ja  $\hat{f}_{max}(t)$  ierobežo frekvenču joslā  $\omega \in [-16\pi, 16\pi]$ . Kā redzams no attēla, tad EFS

rinda dod precīzāku aproksimācijas rezultātu pie mazāka koeficientu skaita, kā arī EFS rindu var izmantot trokšņu aizvākšanai no signāla, ievērojot signāla nestacionaritāti.



3.22. att. Elektrokardiogrammas signāla  $x(t)$  aproksimācija ar EFS un FS rindām: a) signāls  $x(t)$  (pelēkā līnija) un tā maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  (melnā līnija), b) signāla fragmenta STFT laika-frekvences sadalījums un no tā iegūtā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$ , c) ar EFS rindu aprēķinātā signāla aproksimācija  $\hat{x}(t)$  (pelēkā līnija) un kļūdas signāls  $x(t) - \hat{x}(t)$  (melnā līnija) pie  $\varepsilon = 0.002$ , d) attiecību  $r(N)$  atkarība no vidējā EFS un FS koeficientu skaita sekundē, e) EFS koeficientu skaita procentuālie samazinājumi  $\Delta$  un  $\tilde{\Delta}$  salīdzinājumā ar FS koeficientu skaitu pie vienādām  $\varepsilon$  vērtībām

### 3.7. Kopsavilkums

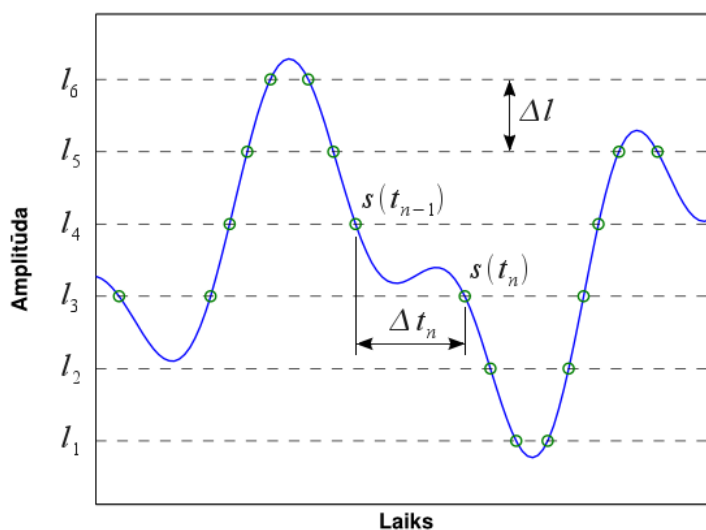
Trešajā nodaļā tika apskatīta signālatkarīga apstrāde, kas ņem vērā signālu laikā mainīgo spektrālo sastāvu. Saistībā ar to autors:

- 1) ieguvis paplašināto Furjē rindu (EFS) periodisku signālu izvērsei trigonometrisku funkciju rindā ar laikā mainīgām frekvencēm;
- 2) no EFS ieguvis darbā [52] definēto paplašināto Furjē transformāciju (EFT);
- 3) formulējis paplašināto nolašu teorēmu signāliem ar ierobežotiem EFT spektriem;
- 4) parādījis, kā no klasiskās signālapstrādes izriet paplašinātā, izmantojot transformēta laika signāla attēlu 3.11.;
- 5) parādījis blokshēmu signālu analogs-ciparu pārveidošanai, kas ņem vērā signālu laikā mainīgo spektrālo sastāvu;
- 6) definējis maksimālās momentānās frekvences izteiksmi signāliem, kas sastāv no trigonometriskām funkcijām ar laikā mainīgām frekvencēm;
- 7) piedāvājis trīs metodes (uz STFT balstīto, EMD un ekstrēmu metodi) signālu maksimālās momentānās frekvences novērtēšanai;
- 8) veicis signālatkarīgās un vienmērīgās apstrādes nolašu skaita un atjaunošanas precizitātes salīdzinājumu mākslīgi sintezētiem un reāliem signāliem ar laikā mainīgām frekvenču īpašībām.

No 3.6.2. apakšnodaļā parādītajiem rezultātiem var secināt, ka signālatkarīgā diskretizācija saskaņā ar maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{max}(t)$  ļauj samazināt analogo signālu diskrētai reprezentācijai nepieciešamo nolašu skaitu salīdzinājumā ar vienmērīgo diskretizāciju, tomēr šādai pieejai piemīt arī būtisks trūkums – to ir grūti realizēt praksē, ko nosaka nepieciešamība pēc signālu analīzes maksimālās momentānās frekvences noteikšanai, kā arī signālu EFT spektru ierobežošana pirms diskretizācijas. Tāpēc nākamajā nodaļā tiks apskatīts no signāla atkarīgs nolašu iegūšanas paņēmiens, kas neprasa  $\hat{f}_{max}(t)$  noteikšanu un ir vienkārši realizējams – tā ir līmeņu-šķērsojumu diskretizācija, kuras gadījumā attālumi starp secīgām nolasēm daļēji ir atkarīgi no signālā “ieslēptās” maksimālās momentānās frekvences  $\hat{f}_{max}(t)$ .

## 4. LĪMEŅU-ŠĶĒRSOJUMU DISKRETIZĀCIJA

Līmeņu-šķērsojumu (LC: Level-crossing) diskretizācija ir signālatkarīgs analogo signālu pārveidošanas paņēmiens no analogās uz ciparu formu, kas ir pazīstams jau no pagājušā gadsimta 50. gadiem [27]. Kā liecina pats nosaukums, tad signāla nolases šajā gadījumā tiek ņemtas signāla un iepriekš uzdotu līmeņu  $l_1, l_2, l_3, \dots$  šķērsojumu vietās  $t_n$  (4.1. attēls) [2], [69].



4.1. att. Līmeņu-šķērsojumu diskretizācija – signāla  $s(t)$  nolāšu  $s(t_n)$  laika momenti  $t_n$  sakrīt ar  $s(t)$  un līmeņu  $l_1, l_2, l_3, \dots$  šķērsojumu vietām

LC diskretizācijas rezultātā parasti iegūst laikā nevienmērīgi izvietotas nolases, un katru no tām raksturo divi lielumi – nolases vērtība  $s(t_n)$ , kas sakrīt ar šķērsotajā līmeņa vērtību, un laika moments  $t_n$ . Jo lēnāk mainās signāls, jo lielāki ir laika intervāli  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  starp secīgām nolāsēm, līdz ar to LC ķēdes darbības aktivitāti (enerģijas patēriņu) lielā mērā nosaka pats signāls [46]. Piemēram, sinusoidālam signālam  $s_1(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$  ar konstantu frekvenci  $f_0$ , izvēloties  $M$  līmeņus atbilstoši izteiksmei  $-A < l_1 < l_2 < \dots < l_M < A$ , vidējais LC nolāšu skaits sekundē (nolāšu blīvums) ir atkarīgs no  $f_0$ :

$$\rho_1 = 2M f_0. \quad (4.1)$$

Savukārt signālam  $s_2(t) = A \sin(\psi(t))$  ar laikā mainīgu frekvenci  $f(t) = \psi'(t)/(2\pi) > 0$  LC nolāšu blīvums mainās proporcionāli  $f(t)$ :

$$\rho_2(t) = 2M f(t). \quad (4.2)$$

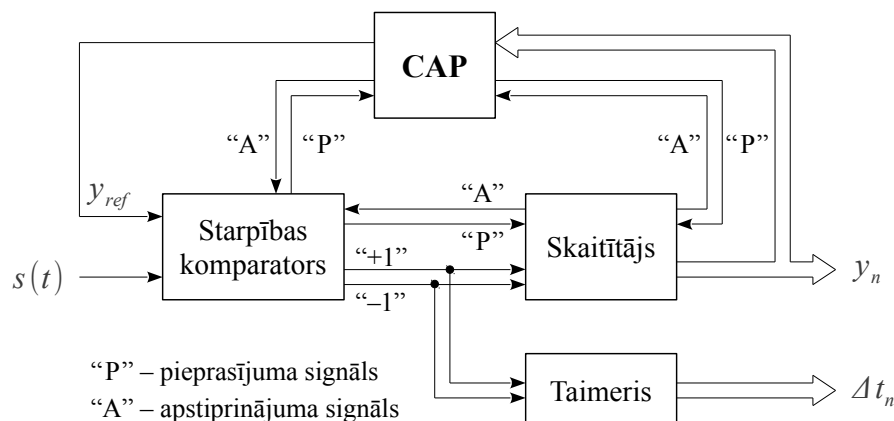
Tāpat proporcionāli frekvencei  $F_{max}$  mainās arī nolāšu blīvums joslā līdz  $F_{max}$  ierobežotam Gausa troksnim ar nulles vidējo vērtību un konstantu jaudas spektrālo blīvumu [58]:

$$\rho_3 = \frac{2 F_{max}}{\sqrt{3}} \sum_{m=1}^M e^{-\frac{l_m^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.3)$$

kur  $\sigma^2$  ir trokšņa dispersija.

#### 4.1. LC diskretizācijas blokshēma

Līmeņu-šķērsojumu diskretizāciju var veikt ar asinhronu ACP, kura blokshēma parādīta 4.2. attēlā [2].



4.2. att. Līmeņu-šķērsojumu AACP blokshēma

Skaitītāja izejas ciparu signāls  $y_n$  ciparanaloga pārvēidotājā (CAP) tiek konvertēts uz tam atbilstošo analogo vērtību  $y_{ref}$ , kas komparatorā tiek salīdzināta ar ieejas signāla  $s(t)$  momentāno vērtību. Ja starpība starp signāliem kļūst lielāka par  $\Delta l/2$  vai mazāka par  $-\Delta l/2$ , kur  $\Delta l$  ir attālums starp vienmērīgi izvietotiem LC līmeņiem, tad skaitītāja izejas signāls mainās attiecīgi par “+ 1” vai “- 1”. Citos gadījumos sistēma savu stāvokli nemaina. AACP izejas signālu veido pāru  $(y_n, \Delta t_n)$ ,  $n \in Z$ , secība, kur  $y_n$  atbilst LC nolašu ciparu vērtībām, bet  $\Delta t_n$  – ar taimeru nomērītajiem laika intervāliem starp  $y_n$  un  $y_{n-1}$ .

Raksturīgi asinhronām ciparu sistēmām [77] informācijas pārsūtīšanu starp blokiem šajā gadījumā kontrolē ar “pieprasījuma” un “apstiprinājuma” signālu palīdzību. Kad pirmais bloks (sūtītājs) ir gatavs sūtīt informāciju otram blokam (saņēmējam), tad sākumā tas nosūta pieprasījuma signālu saņēmējam. Otrais bloks pēc tam, kad ir nolasījis pieprasījuma signālu un ir gatavs jaunas informācijas saņemšanai, nosūta apstiprinājuma signālu pirmajam blokam. Rezultātā no laika momenta  $t_n$ , kad ir noticis līmeņa šķērsojums, līdz laika momentam  $t_n + \tau$ , kad  $y_{ref}$  pieņem jauno vērtību, izveidojas aizkave  $\tau$ , kuras laikā nedrīkst notikt atkārtots šķērsojums, tāpēc jāizpildās nosacījumam [2]:

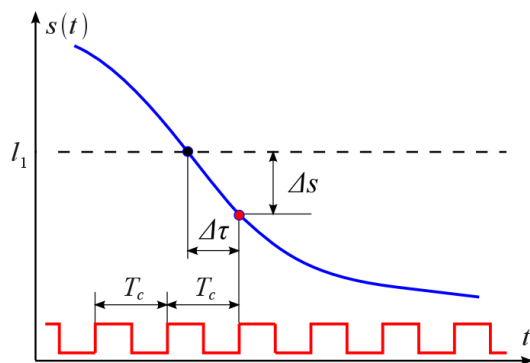
$$s'(t) \leq \frac{\Delta l}{\tau}, \quad (4.4)$$

kur frekvenču joslā līdz  $F_{max}$  ierobežotam signālam atvasinājuma moduļa maksimālā vērtība  $|s'(t)|_{max}$  saskaņā ar Bernšteina nevienādību [80]:

$$|s'(t)|_{max} \leq 2\pi F_{max} |s(t)|_{max}. \quad (4.5)$$

## 4.2. Signāla/kvantēšanas trokšņa attiecība

Klasiskajos ACP nolašu  $s(t_k)$  laika momenti  $t_k = kT$ ,  $k \in Z$ , ir precīzi zināmi, bet amplitūdu vērtības  $s_k = s(t_k)$  tiek kvantētas, kas attiecīgi rada kvantēšanas troksni. LC gadījumā ir pretēji – LC nolašu  $s(t_n)$ ,  $n \in Z$ , amplitūdu vērtības  $s_n = s(t_n)$  ir precīzi zināmas – tās sakrīt ar šķērsoto līmeņu vērtībām, bet laika momenti  $t_n$  tiek kvantēti, tādējādi radot kvantēšanas troksni. Piemēram, 4.2. attēlā parādītajā blokshēmā laika intervālus starp LC nolasēm  $s(t_{n-1})$  un  $s(t_n)$  mēra ar taimeru, kura takts periods  $T_c$  nosaka mērījumu precizitāti [2]. Ja  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  atbilst intervāla patiesajam garumam, bet  $\tilde{\Delta t}_n$  – nomērītajam, tad mērījuma kļūda  $\Delta \tau = \Delta t_n - \tilde{\Delta t}_n$  nepārsniedz  $T_c$ . Attiecīgi signāla nolases kļūda ir  $\Delta s = s'(t) \Delta \tau$  (4.3. attēls).



4.3. att. Kvantēšanas kļūda  $\Delta s$

Uzskatot, ka  $s'(t)$  un  $\Delta \tau$  ir savstarpēji neatkarīgi gadījumlielumi, trokšņa jaudu aprēķina pēc formulas [2]:

$$P_{\Delta s} = P_s \cdot P_{\Delta \tau}. \quad (4.6)$$

Ja  $\Delta \tau$  ar vienādu varbūtību pieņem jebkuru vērtību intervālā no 0 līdz  $T_c$ , tad

$$P_{\Delta \tau} = \int_0^{T_c} \Delta \tau^2 \frac{1}{T_c} d(\Delta \tau) = \frac{1}{3} T_c^2, \quad (4.7)$$

un signāla/kvantēšanas trokšņa attiecība

$$\text{SQNR}_{LC}(\text{dB}) = 10 \lg \frac{P_s}{P_{As}} = 10 \lg \frac{3P_s}{P_{s'} T_c^2} = 10 \lg \frac{3P_s}{P_{s'}} + 20 \lg \frac{1}{T_c} = 10 \lg \frac{3P_s}{P_{s'}} + 20 \lg f_c \quad (4.8)$$

mainās atkarībā no taimera frekvences  $f_c = 1/T_c$ . SQNR vērtība klasiskā ACP gadījumā

$$\text{SQNR}(\text{dB}) = 1.76 + 6.02 N \quad (4.9)$$

ir atkarīga no ACP bitu skaita  $N$ , kuru palielinot par vienu, SQNR pieaugums ir 6.02 dB.

Šādam  $\text{SQNR}_{LC}$  pieaugumam atbilst frekvences  $f_c$  divkāršošana, kas izriet no vienādības

$$10 \lg \frac{3P_s}{P_{s'}} + 20 \lg f_{c2} = 6.02 + 10 \lg \frac{3P_s}{P_{s'}} + 20 \lg f_{c1} \Rightarrow f_{c2} = 10^{6.02/20} f_{c1} \approx 2 f_{c1}. \quad (4.10)$$

$\text{SQNR}_{LC}$  piemēri: signālam  $s_1(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$  signāla/kvantēšanas trokšņa attiecība ir:

$$\text{SQNR}_{LC}(\text{dB}) = 20 \lg \left( \frac{\sqrt{3} f_c}{2\pi f_0} \right) = -11.19 + 20 \lg \left( \frac{f_c}{f_0} \right), \quad (4.11)$$

savukārt frekvenču joslā līdz  $F_{max}$  ierobežotam Gausa troksnim ar nulles vidējo vērtību un konstantu jaudas spektrālo blīvumu:

$$\text{SQNR}_{LC}(\text{dB}) = 20 \lg \left( \frac{3 f_c}{2\pi F_{max}} \right) = -6.42 + 20 \lg \left( \frac{f_c}{F_{max}} \right). \quad (4.12)$$

### 4.3. LC nolašu reprezentācija

LC nolases apraksta divi lielumi – nolases vērtība  $s(t_n)$ , kas sakrīt ar šķērsotā līmeņa vērtību, un nolases laika moments  $t_n$ , kas sakrīt ar līmeņa šķērsošanas brīdi. Atkarībā no tā, kā tiks realizēta datu pārraide, iespējami dažādi LC nolašu attēlojuma varianti.

**Pirmā pieeja.** Pārraidīt var nolašu  $s(t_n)$  vērtības, kuras katru reprezentē  $N_l$  biti, un nolasēm atbilstošās  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  vērtības, kuras katru reprezentē  $N_{T_c}$  biti. Rezultātā vienas LC nolases kodēšanai nepieciešami  $N_l + N_{T_c}$  biti. Ja LC pārveidojumā izmanto  $M$  līmeņus  $l_1 < l_2 < \dots < l_M$ , tad katra līmeņa reprezentācijai nepieciešami  $N_l \geq \log_2 M$  biti.

**Otrā pieeja.** Pārraidīt var signāla atvasinājuma zīmi šķērsošanas brīdī  $t_n$  – pozitīvai atvasinājuma vērtībai  $s'(t_n) > 0$  atbilst loģiskais 1, bet negatīvai – loģiskā 0 (4.4. attēls). Rezultātā iegūtā bitu virkne  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  reprezentē nolašu  $s(t_n)$  vērtības atbilstoši izteiksmei

$$s(t_n) = l_{m_n}, \quad (4.13)$$

kur līmeņu  $l_{m_n}$  indeksi:

$$m_n = (-1)^{a_n} + m_{n-1}. \quad (4.14)$$

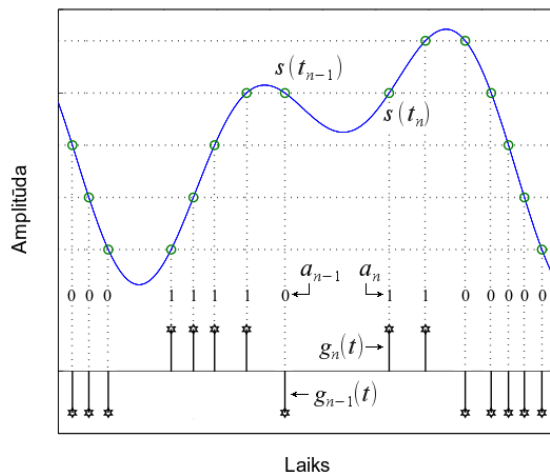
Nolašu  $s(t_n)$  atjaunošana būs iespējama, ja bitu  $a_n$  pārraide un uztveršana notiks bez zudumiem un zināms būs pirmā šķērsotā līmeņa  $l_{m_1}$  indekss  $m_1$ , ko nosaka LC analogciparu pārveidotājs.

Papildus bitiem  $a_n$  tiek pārraidītas arī intervālu  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  vērtības, kuras katru reprezentē  $N_{T_c}$  biti. Rezultātā vienas LC nolases kodēšanai šajā gadījumā ir nepieciešami  $1 + N_{T_c}$  biti.

**Trešā pieeja.** LC nolases  $s(t_n)$  var reprezentēt ar UWB impulsu virkni

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{a_n} g_n(t), \quad (4.15)$$

kur  $a_n$  nosaka impulsa  $g_n(t)$  polaritāti, bet  $t_n$  – pozīciju uz laika ass:  $g_n(t) = g(t - t_n)$  (4.4. attēls).



4.4. att. LC nolašu pārraide ar UWB impulsiem  $g_n(t) = g(t - t_n)$

Uztvērēja daļā, saņemot signālu  $u(t)$ , nolašu  $s(t_n)$  vērtības atrod saskaņā ar (4.13), nosakot impulsa  $g_n(t)$  pienākšanas laiku  $t_n$  un polaritāti  $(-1)^{a_n}$ , no kuras seko  $a_n$  vērtība 0 vai 1.

#### 4.4. Signālu atjaunošana no LC nolasēm

LC diskretizācija vienkāršo datu ieguvī, bet sarežģītāku padara to pēcapstrādi, ko nosaka nevienmērīgais LC nolašu izvietojums laikā. Atkarībā no pielietojuma apstrādi var veikt gan ar asinhronām sistēmām [66], [V], gan ar sinhronām sistēmām, ja vien pirms tam ir veikts signāla pārrēķins no LC nolasēm uz laikā vienmērīgi izvietotām nolasēm. Otrajā gadījumā signālapstrādes iespējas kļūst plašākas, tāpēc tālāk apskatīsim signālu atjaunošanu

no LC nolasēm [VII], [IX], [X], [XI], [XII], [XIV].

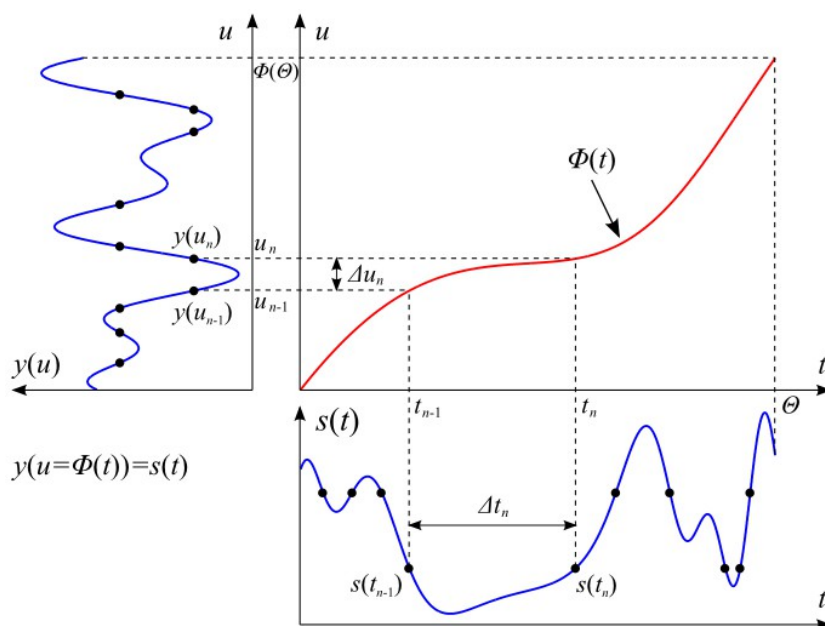
#### 4.4.1. Precīzas atjaunošanas pietiekamais nosacījums

Signālu atjaunošana no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm  $s(t_n)$  ne vienmēr ir vienkārši atrisināms uzdevums. Parasti tiek apskatītas noteiktas signālu klases, kurām izstrādātie algoritmi darbojas tikai pie noteiktiem nosacījumiem, un tāda universāla paņēmiena, kas der visiem gadījumiem, nav [60]. Kā parādīts darbos [8], [39], [60], tad frekvenču joslā  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$  ierobežotu signālu precīza atjaunošana ir iespējama, ja vidējā to diskretizācijas frekvence  $\bar{f}_d > \Omega/\pi$ , līdz ar to precīzas atjaunošanas pietiekamais nosacījums ir [29], [34], [50]:

$$\Delta t_{max} = \sup_{n \in N} (t_n - t_{n-1}) < \frac{\pi}{\Omega}. \quad (4.16)$$

LC gadījumā problēma ir tā, ka nosacījuma (4.16) izpildi signālam ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu pie noteikta līmeņu izvietojuma  $l_1 < l_2 < \dots < l_M$  ir grūti prognozēt, ko nosaka attālumu  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  atkarība no paša signāla. Jo blīvāk būs izvietoti līmeņi  $l_m$ , jo lielāka būs varbūtība, ka (4.16) izpildīsies, bet vienlaikus mazāka kļūs LC pārveidojuma energoefektivitāte, ko noteiks vidējais LC nolašu skaits sekundē.

Lai izvairītos no pārlieku liela nolašu daudzuma, nosacījumu (4.16) rakstīsim nevis signālam  $s(t)$ , bet gan transformēta laika signālam  $y(u)$ , kas parādīts 4.5. attēlā.



4.5. att. Signāla  $s(t)$  transformēta laika  $u = \Phi(t)$  signāls  $y(u)$ , kuram izpildās:  $y(\Phi(t)) = s(t)$

Ja signāla  $y(u)$  FT spektrs  $F[y(u)]$  ir frekvenču joslā  $[-\Omega_g, \Omega_g]$  ierobežots, tad pietiekamais nosacījums  $y(u)$  precīzai atjaunošanai no nolasēm  $y(u_n)$  ir:

$$\Delta u_{max} = \sup_{n \in N} (u_n - u_{n-1}) < \frac{\pi}{\Omega_g}. \quad (4.17)$$

Rakstot šo formulējumu signālam  $y(u)$ , kura argumenta  $u$  vietā liek  $u = \Phi(t)$  (funkcija  $\Phi(t)$  definēta ar izteiksmi (3.27)), un ievērojot sakarību  $y(\Phi(t)) = s(t)$ , iegūst pietiekamo nosacījumu signāla  $s(t)$ , kura EFT spektrs  $S(\omega_g) = \tilde{F}[s(t), g(t)]$  ir joslā  $\omega_g \in [-\Omega_g, \Omega_g]$  ierobežots, precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm  $s(t_n)$  [I]:

$$\sup_{n \in N} (\Phi(t_n) - \Phi(t_{n-1})) < \frac{\pi}{\Omega_g}. \quad (4.18)$$

Salīdzinot (4.18) ar (4.16), var secināt, ka maksimālais attālums  $\Delta t_{max}$  starp signāla nolasēm šajā gadījumā var ievērojami pārsniegt Naikvista soli  $\pi/\Omega$ , un to nosaka funkcija  $\Phi(t)$ . Viens tāds piemērs parādīts 4.5. attēlā – lielais laika intervāls  $\Delta t_n$  starp signāla  $s(t)$  LC nolasēm  $s(t_{n-1})$  un  $s(t_n)$  ar funkcijas  $\Phi(t)$  pārveidojumu pārvēršas par mazu transformētā laika  $u = \Phi(t)$  intervālu  $\Delta u_n$  starp tām pašām signāla  $y(u)$  LC nolasēm  $y(u_{n-1}) = s(t_{n-1})$  un  $y(u_n) = s(t_n)$ .

Jautājums ir, kā funkciju  $\Phi(t)$ , kas vispārīgā gadījumā nav zināma, atrast no LC nolasēm, lai tālāk to izmantotu signāla  $s(t)$  atjaunošanai? Līdzīgi kā 3. nodaļā, sākumā atradīsim signāla maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{max}(t)$ , un pēc tam saskaņā ar (3.72) funkciju  $\Phi(t)$ .

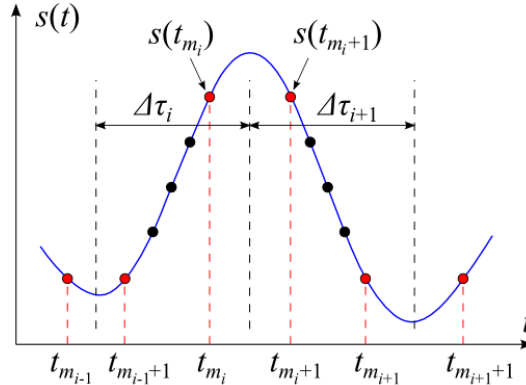
#### 4.4.2. Maksimālās momentānās frekvences noteikšana no LC nolasēm

Trešajā nodaļā apskatītās  $\hat{f}_{max}(t)$  novērtēšanas metodes (STFT, EMD un ekstrēmu metode) ir paredzētas vienmērīgi diskretizētiem signāliem, tāpēc šajā gadījumā tiešā veidā nav pielietojamas. Saistībā ar signālu frekvenču analīzi darbā [32] ir parādītas vairākas laika-frekvences sadalījuma  $S(t, f)$  noteikšanas metodes signāliem, kas diskretizēti pēc LC principa, tomēr to pielietojums prasa lielu LC nolašu blīvumu un aprēķinu laiku. Citā darbā [17] ir aprakstīts paņēmiens, kā no LC nolasēm atrast signāla  $s(t) = A \sin(\psi(t))$  momentāno frekvenci, tomēr tā pielietojums ir visai ierobežots, jo reālās pasaules signāli bieži vien ir sarežģītāki.

Lai noteiktu signāla maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{max}(t)$ , izmantosim uz

empīriskiem apsvērumiem balstītas divas metodes [I], [VII].

**Pirmā metode.** No dotajām LC nolāsēm  $s(t_n)$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ , atrod visus tos indeksus  $m_1 < m_2 < \dots < m_I \in [1, N]$ , pie kuriem  $s(t_{m_i}) = s(t_{m_i+1})$  (4.6. attēls).



4.6. att. Indeksu  $m_i$  meklēšana, pie kuriem  $s(t_{m_i}) = s(t_{m_i+1})$

Tālāk katram  $i=1, 2, \dots, I$  aprēķina vērtības:

$$f(\tau_i) = \frac{1}{2 \Delta \tau_i}, \quad (4.19)$$

kur

$$\tau_i = \frac{t_{m_i} + t_{m_i+1}}{4} + \frac{t_{m_{i-1}} + t_{m_{i-1}+1}}{4} \quad (4.20)$$

un

$$\Delta \tau_i = \frac{t_{m_i} + t_{m_i+1}}{2} - \frac{t_{m_{i-1}} + t_{m_{i-1}+1}}{2} \quad (4.21)$$

Ja signāls sastāv no vienas harmonikas:  $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ , tad  $f(\tau_i) = f_0$  visiem  $i$ . Ja signāls sastāv no vairāku harmoniku summas, tad  $f(\tau_i)$  vidējā vērtība

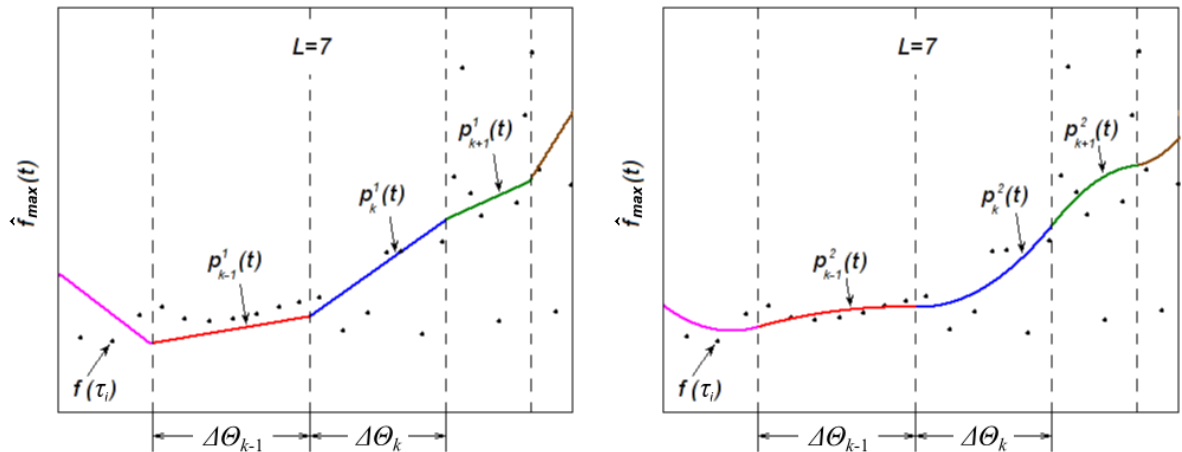
$$\bar{f} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I f(\tau_i), \quad (4.22)$$

kā izriet no eksperimentāliem rezultātiem, aptuveni sakrīt ar harmoniku summas augstāko frekvenci, tāpēc par signāla maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{max}(t)$  pieņem funkciju, kuru atrod, aproksimējot punktus  $f(\tau_i)$  ar pa gabaliem atšķirīgiem vienādas kārtas  $r$  polinomiem  $p_k^r(t)$ , izmantojot mazāko kvadrātu metodi. Izvēloties veselu skaitli  $L > 1$ , pilno laika intervālu  $t \in [t_1, t_N]$ , kurā izvietojušās LC nolases  $s(t_n)$ , sadala mazākos intervālos

$$\Delta \Theta_k: t \in [t_k \text{ sākuma}, t_k \text{ beigu}], \quad (4.23)$$

kur  $k=0, 1, \dots$  apzīmē intervāla numuru un

$$t_k \text{ sākuma} = \frac{\tau_{kL+1} + \tau_{kL+2}}{2}, \quad t_k \text{ beigu} = \frac{\tau_{(k+1)L} + \tau_{(k+1)L+1}}{2}. \quad (4.24)$$



4.7. att. Punktu  $f(\tau_i)$  aproksimācija ar pa gabaliem atšķirīgiem pirmās (pa kresi) un otrās (pa labi) kārtas polinomiem  $p_k^1(t)$  un  $p_k^2(t)$

Katram intervālam  $\Delta\Theta_k$  atrod polinoma  $p_k^r(t) = a_{k,r}t^r + a_{k,r-1}t^{r-1} + \dots + a_{k,0}$  koeficientus  $a_{k,r}, a_{k,r-1}, \dots, a_{k,0}$  tā, lai izpildītos:

- 1) intervāla sākuma un beigu punktos  $t_k$  sākuma un  $t_k$  beigu polinomu  $p_{k-1}^r(t)$ ,  $p_k^r(t)$  un  $p_k^r(t)$ ,  $p_{k+1}^r(t)$  un to pirmo  $r$  atvasinājumu vērtības ir vienādas:

$$\begin{aligned} p_{k-1}^r(t_k \text{ sākuma}) &= p_k^r(t_k \text{ sākuma}) & p_k^r(t_k \text{ beigu}) &= p_{k+1}^r(t_k \text{ beigu}) \\ p_{k-1}^r(t_k \text{ sākuma})^{(1)} &= p_k^r(t_k \text{ sākuma})^{(1)} & \text{un } p_k^r(t_k \text{ beigu})^{(1)} &= p_{k+1}^r(t_k \text{ beigu})^{(1)} \\ &\vdots & &\vdots \\ p_{k-1}^r(t_k \text{ sākuma})^{(r)} &= p_k^r(t_k \text{ sākuma})^{(r)} & p_k^r(t_k \text{ beigu})^{(r)} &= p_{k+1}^r(t_k \text{ beigu})^{(r)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

- 2) summas

$$\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=kL+1}^{(k+1)L} (f(\tau_i) - p_k^r(\tau_i))^2 \quad (4.26)$$

vērtība ir minimāla ( $K$  ir kopējais intervālu  $\Delta\Theta_k$  skaits).

Kad ir iegūti visu polinomu  $p_k^r(t)$  koeficienti  $a_{k,r}, a_{k,r-1}, \dots, a_{k,0}$ , funkciju  $\hat{f}_{\max L}(t)$  atrod:

$$\hat{f}_{\max L}(t) = p_k^r(t), \quad t \in [t_k \text{ sākuma}, t_k \text{ beigu}]. \quad (4.27)$$

Tā kā šis rezultāts ir atkarīgs no  $L$ , kas nosaka, cik punkti  $f(\tau_i)$  katrā no intervāliem  $\Delta\Theta_k$  tiek aproksimēti, tad par signāla maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{\max}(t)$  izvēlas vidējo funkciju

$$\hat{f}_{\max}(t) = \frac{1}{L_2 - L_1} \sum_{L=L_1}^{L_2-1} \hat{f}_{\max L}(t), \quad (4.28)$$

kur  $L_2 - 1 \geq L_1$  [VII], [IX].

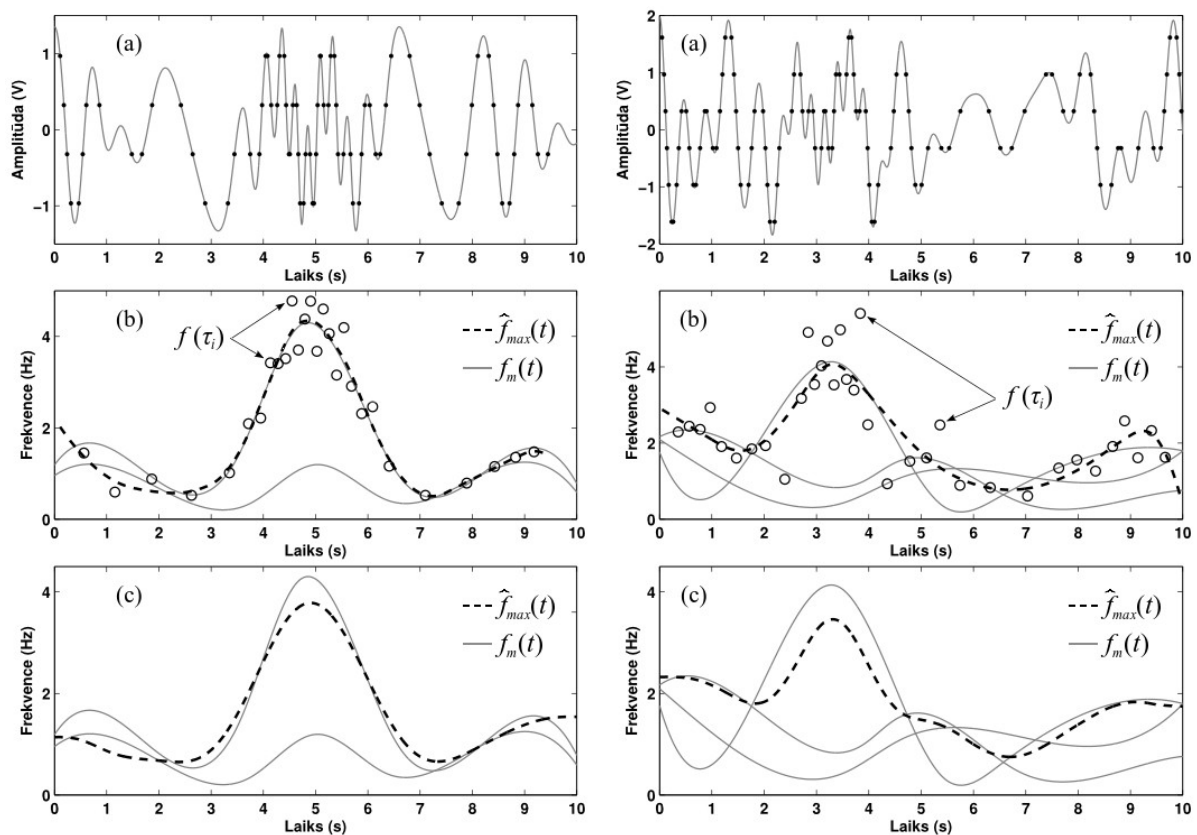
Punktu  $f(\tau_i)$  aproksimācijas piemēri ar pirmās ( $r=1$ ) un otrās ( $r=2$ ) kārtas polinomiem, ja  $L=7$ , parādīti 4.7. attēlā.

**Otrā metode.** Līdzīgi kā iepriekš, no dotajām LC nolasēm  $s(t_n)$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ , sākumā

atrod visus tos indeksus  $m_1 < m_2 < \dots < m_I \in [1, N]$ , pie kuriem  $s(t_{m_i}) = s(t_{m_i+1})$  (4.6. attēls). Ievērojot to, ka starp LC nolasēm  $s(t_{m_i})$  un  $s(t_{m_i+1})$  atrodas vismaz viens signāla  $s(t)$  lokālais ekstrēms, tad tuvināti aprēķina tā laika pozīciju:  $\tau_i = (t_{m_i} + t_{m_i+1})/2$ . Tālāk, pēc līdzības ar 3.6.1. apakšnodaļā doto ekstrēmu metodi, maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{max}(t)$  atrod no  $\tau_i$ :

- 1) aprēķina funkcijas  $\tilde{\Phi}(t)$  vērtības laika momentos  $\tau_i$ :  $\tilde{\Phi}(\tau_i) = i\pi$ , kuras tālāk interpolē ar Ermita kubiskajiem splainiem, un iegūst laikā nepārtrauktu, monotoni augošu funkciju  $\tilde{\Phi}(t)$ ;
- 2) no  $\tilde{\Phi}(t)$  atrod svārstības  $\cos(\tilde{\Phi}(t))$  momentāno frekvenci  $\tilde{f}(t)$ , kuru tālāk nogludina ar zemo frekvenču filtru un iegūst  $\hat{f}_{max}(t)$  [I].

**Piemēri.** Ar abām metodēm iegūto maksimālo momentāno frekvenču  $\hat{f}_{max}(t)$  piemēri diviem izteiksmes  $s(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(\psi_m(t))$  signāliem parādīti 4.8. attēlā – signāls pa kreisi sastāv no  $M=2$  komponentēm ar laikā mainīgām frekvencēm  $f_m(t) = \psi'(t)/(2\pi)$ , kas (b) un (c) attēlos parādītas ar nepārtrauktām līnijām, bet signāls pa labi – no  $M=3$  komponentēm.



4.8. att. Ar pirmo (b) un otro (c) metodi iegūtās maksimālās momentānās frekvences  $\hat{f}_{max}(t)$  no signālu (a) LC nolasēm

Kā redzams no attēla, tad  $\hat{f}_{max}(t)$  abos gadījumos aptuveni izseko signāla patiesajai frekvencei  $f_{max}(t)$ , kas definēta ar izteiksmi (3.76). Otrās metodes priekšrocība salīdzinājumā ar pirmo ir tā, ka tā ir daudz vienkāršāka, kā arī nav jādomā par parametra  $L$  izvēli, kas pirmās metodes gadījumā pie maziem  $L$  būtiski ietekmē rezultātu.

Pēc funkciju  $\hat{f}_{max}(t)$  noteikšanas no signālu  $s(t)$  LC nolasēm  $s(t_n)$ , tālāk seko  $s(t)$  atjaunošana.

### 4.4.3. Iteratīvā atjaunošana

**Klasiskā filtrācija.** Ja izpildās nosacījums (4.16), tad frekvenču joslā  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$  ierobežotus signālus  $s(t)$  var atjaunot no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm  $s(t_n)$  saskaņā ar iteratīvu algoritmu [29], [34]:

$$\begin{aligned}\hat{s}_0(t) &= A[\check{s}_{s(t_n)}(t)] \\ \hat{s}_{i+1}(t) &= \hat{s}_i(t) + A[\check{s}_{(s-s_i)}(t)],\end{aligned}\quad (4.29)$$

kur  $i \geq 0$  apzīmē iterācijas numuru,  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  atbilst nolašu  $s(t_n)$  interpolācijas rezultātā iegūtajam signālam

$$\check{s}_{s(t_n)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \varphi_n(t), \quad (4.30)$$

bet ar operatoru  $A$  tiek atrasta interpolācijas signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  ortogonālā projekcija frekvenču joslā  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$  ierobežotu signālu telpā, t.i., operators  $A$  veic interpolācijas signāla filtrāciju ar ideālu zemo frekvenču filtru. Algoritma rezultāts, kad  $i$  tiecas uz bezgalību, ir  $s(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{s}_i(t)$ , bet atjaunošanas kļūda pakāpienveida interpolācijas gadījumā, ja

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{ja } (t_{n-1} + t_n)/2 \leq t < (t_n + t_{n+1})/2 \\ 0, & \text{citur,} \end{cases} \quad (4.31)$$

pēc  $i$  iterācijām ir:

$$\|s(t) - s_i(t)\| \leq \frac{1 + \Delta t_{max} \Omega / \pi}{1 - \Delta t_{max} \Omega / \pi} (\Delta t_{max} \Omega / \pi)^{i+1} \|s(t)\|. \quad (4.32)$$

Nolašu  $s(t_n)$  interpolācijai izteiksmē (4.30) var lietot arī citas  $\varphi_n(t)$  funkcijas, kurām izpildās vienotā sadalījuma nosacījums  $\sum_{n \in Z} \varphi_n(t) = 1$  [34], un atkarībā no tām mainās algoritma (4.29) konverģences ātrums [34]. Piemēram, lineārās interpolācijas gadījumā

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} (t-t_{n-1})/(t_n-t_{n-1}), & \text{jā } t_{n-1} \leq t < t_n \\ (t_{n+1}-t)/(t_{n+1}-t_n), & \text{jā } t_n \leq t < t_{n+1} \\ 0, & \text{citur,} \end{cases} \quad (4.33)$$

un atjaunošanas kļūda

$$\|s(t) - s_i(t)\| \leq \frac{1 + (\Delta t_{\max} \Omega / \pi)^2}{1 - (\Delta t_{\max} \Omega / \pi)^2} (\Delta t_{\max} \Omega / \pi)^{2(i+1)} \|s(t)\| \quad (4.34)$$

samazinās ātrāk nekā funkciju (4.31) gadījumā.

Praksē dotais LC nolašu  $s(t_n)$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$ , skaits ir galīgs, tāpēc operatora  $A$  skaitliskai realizācijai pieņem, ka interpolācijas signāls  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_{N-1}]$ , periodiski atkārtojas ar periodu  $\Theta = t_{N-1} - t_0$ , līdz ar to  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  var izteikt ar klasisko Furjē rindu

$$\check{s}_{s(t_n)}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{jm \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (4.35)$$

bet operatoru  $A$ :

$$A[\check{s}_{s(t_n)}(t)] = \sum_{m=-M}^M \gamma_m e^{jm \frac{2\pi}{\Theta} t}, \quad (4.36)$$

kas pie skaitļa  $M$  vērtības

$$M = \lfloor \Theta \Omega / (2\pi) \rfloor \quad (4.37)$$

ierobežo signālu  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  joslā  $\omega \in [-\Omega, \Omega]$ . Lineārās interpolācijas gadījumā koeficientus  $\gamma_m$  aprēķina no  $s(t_n)$  un  $t_n$  vērtībām saskaņā ar 6. pielikumā dotajām izteiksmēm (P6.4) un (P6.5).

**Filtrācija ar laikā mainīgu caurlaides joslu.** Nestacionāriem signāliem, kas diskretizēti pēc LC principa, nosacījums (4.16) bieži vien var neizpildīties. Vietās, kur signāla izmaiņas būs straujākas (lielāka maksimālā momentānā frekvence), attālumi  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  starp LC nolasēm būs mazāki, un lielāka būs varbūtība tam, ka  $\Delta t_n < \pi / \Omega$ . Savukārt vietās, kur signāla izmaiņas būs lēnākas (mazāka maksimālā momentānā frekvence), attālumi starp LC nolasēm pieaugs, kas attiecīgi palielinās notikuma  $\Delta t_n > \Omega / \pi$  izpildīšanās varbūtību un pasliktinās signāla atjaunošanas precizitāti šajās vietās.

Nemot vērā, ka attālumus  $\Delta t_n$  starp LC nolasēm ietekmē signāla maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{\max}(t)$ , tad precīzāka rezultāta sasniegšanai tiek piedāvāta sekojoša metode [I]:

- 1) no LC nolasēm  $s(t_n)$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$ , atrod  $\hat{f}_{\max}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_{N-1}]$ , bet no tās – funkciju

$$\Phi(t) = 2\pi \int_{t_0}^t \hat{f}_{\max}(\tau) d\tau \text{ ar sākumvērtību } \Phi(t_0) = 0 \text{ un beigu vērtību } \Phi(t_{N-1}) = \Phi(\Theta);$$

2) no  $\Phi(t)$  atrod transformētā laika  $u=\Phi(t)$  vērtības  $u_n=\Phi(t_n)$ , no kurām seko transformētā laika signāla  $y(u)$  LC nolases  $y(u_n)=s(t_n)$ , kas izriet no vienādības  $y(\Phi(t))=s(t)$  (4.5. attēls);

3) ja signāla  $y(u)$ ,  $u\in[0, \Phi(\Theta)]$ , FT spektrs ir joslā  $[-\Omega_g, \Omega_g]$  ierobežots, tad, izpildoties nosacījumam (4.17),  $y(u)$  atrod no  $y(u_n)$  saskaņā ar (4.29):

$$\begin{aligned}\hat{y}_0(u) &= A[\check{y}_{y(u_n)}(u)] \\ \hat{y}_{i+1}(u) &= \hat{y}_i(u) + A[\check{y}_{(y-y_i)(u_n)}(u)],\end{aligned}\quad (4.38)$$

kur  $y(u)=\lim_{i\rightarrow\infty}\hat{y}_i(u)$  un atjaunošanas kļūda pakāpienveida interpolācijas gadījumā:

$$\|y(u)-y_i(u)\| \leq \frac{1 + \Delta u_{\max} \Omega_g / \pi}{1 - \Delta u_{\max} \Omega_g / \pi} (\Delta u_{\max} \Omega_g / \pi)^{i+1} \|y(u)\|; \quad (4.39)$$

4) ievērojot to, ka  $u=\Phi(t)$  un  $t=\Phi^{-1}(u)$ , no  $y_i(u)$  atrod:  $s_i(t=\Phi^{-1}(u))=y_i(u)$ , un atjaunošanas kļūda:

$$\left\| \frac{s(t)-s_i(t)}{\sqrt{g(t)}} \right\| \leq \frac{1 + \Delta u_{\max} \Omega_g / \pi}{1 - \Delta u_{\max} \Omega_g / \pi} (\Delta u_{\max} \Omega_g / \pi)^{i+1} \left\| \frac{s(t)}{\sqrt{g(t)}} \right\|, \quad (4.40)$$

kur  $g(t)=1/(2\pi \hat{f}_{\max}(t))$  un  $\Delta u_{\max}$  saskaņā ar (4.17) ir  $\Delta u_{\max}=\sup_{n\in N}(\Phi(t_n)-\Phi(t_{n-1}))$ .

Kā var secināt no metodes apraksta, tad sākumā, izmantojot klasiskās filtrācijas algoritmu (4.38), tiek atjaunots transformētā laika signāls  $y(u)$ , un pēc tam ar inverso pārveidojumu  $t=\Phi^{-1}(u)$  tiek iegūts pats signāls  $s(t)$ . Ņemot vērā, ka operators  $A[\check{y}_{y(u_n)}(u)]$ , kas ierobežo transformētā laika signāla  $\check{y}_{y(u_n)}(u)$  FT spektru joslā  $[-\Omega_g, \Omega_g]$ , ir ekvivalents operatoram  $\tilde{A}[\check{s}_{s(t_n)}(t)]$ , kas ierobežo ar inverso pārveidojumu iegūtā signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  EFT spektru joslā  $\omega_g\in[-\Omega_g, \Omega_g]$ , tad algoritmu (4.38) signāla  $s(t)$  atjaunošanai no  $s(t_n)$  var ekvivalenti rakstīt:

$$\begin{aligned}\hat{s}_0(t) &= \tilde{A}[\check{s}_{s(t_n)}(t)] \\ \hat{s}_{i+1}(t) &= \hat{s}_i(t) + \tilde{A}[\check{s}_{(s-s_i)(t_n)}(t)],\end{aligned}\quad (4.41)$$

kur  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  pakāpienveida interpolācijas gadījumā ir

$$\check{s}_{s(t_n)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \varsigma_n(t), \quad (4.42)$$

funkcijas  $\varsigma_n(t)$ , ja  $\tau_n=\Phi^{-1}((\Phi(t_{n-1})+\Phi(t_n))/2)$  un  $\tau_{n+1}=\Phi^{-1}((\Phi(t_n)+\Phi(t_{n+1}))/2)$ :

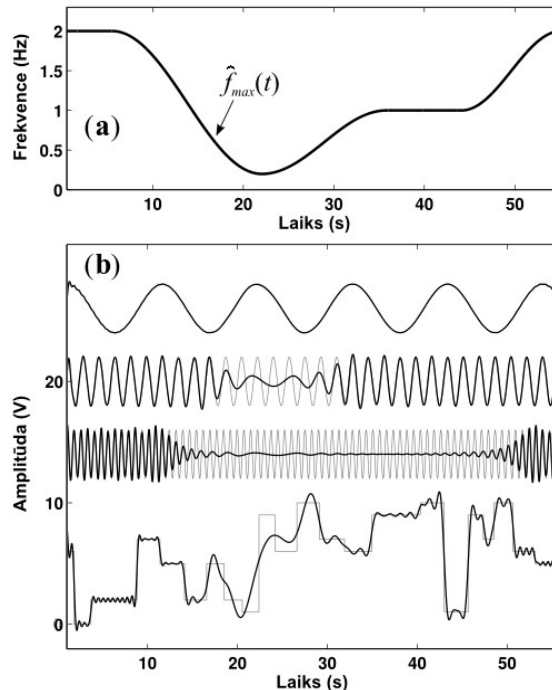
$$\varsigma_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{ja } \tau_n \leq t < \tau_{n+1} \\ 0, & \text{citur,} \end{cases} \quad (4.43)$$

un operators  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}[\tilde{s}_{s(t_n)}(t)] = \sum_{m=-M}^M c_m e^{jm \frac{2\pi}{\Phi(\theta)} \Phi(t)}, \quad (4.44)$$

kur  $M = \lfloor \Phi(\theta) \Omega_g / (2\pi) \rfloor$  un  $c_m$  ir interpolācijas signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  EFS koeficienti, kurus pakāpienveida interpolācijas gadījumā atrod no  $s(t_n)$  un  $\Phi(t_n)$  vērtībām saskaņā ar 7. pielikumā doto izteiksmi (P7.4). Algoritma (4.41) rezultāts, kad  $i$  tiecas uz bezgalību, ir  $s(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{s}_i(t)$ , bet atjaunošanas kļūda pakāpienveida interpolācijas gadījumā sakrīt ar (4.39).

Algoritmu (4.29) un (4.41) pieraksts ir ļoti līdzīgs – abos gadījumos tiek veikta nolašu interpolācija un interpolācijas rezultātā iegūtā signāla filtrācija. Pirmajā (klasiskajā) gadījumā tiek izmantots filtrs ar laikā nemainīgu caurlaides joslu, bet otrajā – filtrs ar laikā mainīgu caurlaides joslu, kuru nosaka signāla maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  (šādas filtrācijas piemēri parādīti 4.9. attēlā), turklāt attālumi  $\Delta t_n$  starp LC nolasēm otrajā gadījumā var būt ievērojami lielāki nekā pirmajā, ko nosaka Naikvista kritērijs attiecībā nevis uz  $\Delta t_{max}$  vērtību (nosacījums (4.16)), bet gan uz  $\Delta \Phi_{max} = \sup_{n \in N} (\Phi(t_n) - \Phi(t_{n-1}))$  vērtību (nosacījums (4.18)). Varētu teikt, ka pirmā algoritma gadījumā nosacījumam (4.16) jāizpildās globāli, ko nosaka visā garumā dotā signāla maksimālā frekvence  $F_{max} = \Omega / (2\pi)$ , bet otrajā gadījumā šim nosacījumam jāizpildās lokāli, ko nosaka signāla maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$ .



4.9. att. Signālu (b) filtrācija ar laikā mainīgas caurlaides joslas (a) filtru (filtra ieejas signāli (pelēkās līnijas) ir sinusi ar frekvencēm (sākot no augšas) 0.1, 0.6 un 1.4 Hz, un ceturtais ir gabaliem konstants signāls, bet izejas signāli – melnās līnijas

#### 4.4.4. Atjaunošana pēc mazāko kvadrātu metodes

No algoritmiem (4.29) un (4.41) izriet, ka atjaunotos signālus  $s(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{s}_i(t)$  var izteikt formā

$$s(t) = \sum_{m=-M}^M \hat{c}_m q_m(t), \quad (4.45)$$

kur  $\hat{c}_m$  ir koeficienti pie bāzes funkcijām  $q_m(t)$ , kas vienā gadījumā sakrīt ar  $e^{jm2\pi t/\Theta}$ , bet otrā – ar  $e^{jm2\pi \Phi(t)/\Phi(\Theta)}$ . Ja ir dotas signāla  $s(t)$  LC nolasēs  $s(t_n)$ ,  $n \in Z$ , tad liekot tās izteiksmē (4.45), iegūst lineāru vienādojumu sistēmu

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{c}}, \quad (4.46)$$

kur  $\mathbf{s} = [\dots, s(t_{n-1}), s(t_n), \dots]^T$  ir LC nolašu vektors, matricas  $\mathbf{Q}$  elementi ir  $Q_{n,m} = q_m(t_n)$ , un  $\hat{\mathbf{c}} = [\hat{c}_{-M}, \dots, \hat{c}_M]^T$  ir nezināmo koeficientu vektors, kas jāatrod. Ja matrica  $\mathbf{Q}$  ir invertējama, tad no (4.46) iegūst:

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}. \quad (4.47)$$

Ja matrica nav invertējama, tad risinājumu meklē pēc mazāko kvadrātu metodes un iegūst:

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{s} = \mathbf{Q}^+ \mathbf{s}, \quad (4.48)$$

kur  $\mathbf{Q}^+ = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T$  ir matricas  $\mathbf{Q}$  pseidoinversā matrica [90].

Kā izriet no [29], tad FS gadījumā, ja izpildās nosacījums (4.16), tad koeficienti (4.48) ar izteiksmi (4.45) dod to pašu signālu  $s(t)$ , ko algoritms (4.29), t.i.,  $s(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{s}_i(t)$ , savukārt EFS gadījumā, ja izpildīsies (4.18), tad atjaunotais signāls sakrīt ar (4.41) rezultātu  $s(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{s}_i(t)$ .

#### 4.4.5. Atjaunošana pēc mazāko kvadrātu metodes ar nosacījumiem

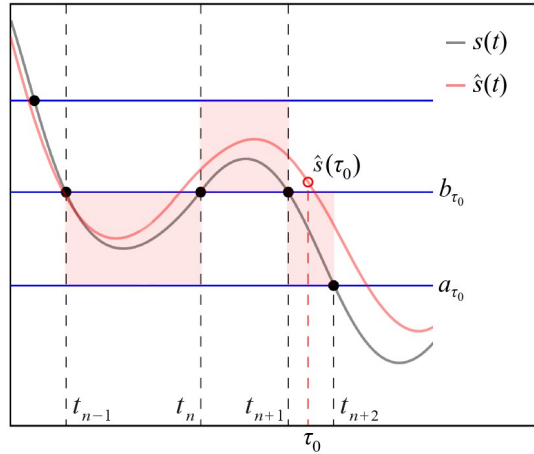
Iepriekš tika jau minēts, ka nestacionāriem signāliem, kas diskretizēti pēc LC principa, attālumi  $\Delta t_n$  starp LC nolasēm bieži var pārsniegt  $\pi/\Omega$  vērtību, kā rezultātā ar izteiksmi (4.48) iegūtie koeficienti  $\hat{c}_m$  dos no oriģinālā signāla  $s(t)$  atšķirīgu atjaunoto signālu

$$\hat{s}(t) = \sum_{m=-M}^M \hat{c}_m q_m(t). \quad (4.49)$$

Tas pats var notikt arī EFS gadījumā, kad attālumi  $\Phi(t_n) - \Phi(t_{n-1})$  pārsniegs  $\pi/\Omega_g$  vērtību.

Lai izvairītos no lielām kļūdām, LC gadījumā var ņemt vērā to, ka atjaunotajam

signālam brīvi izvēlētā laika momentā  $t = \tau_0$  ir jāatrodas starp diviem noteiktiem līmeņiem  $a_{\tau_0} \leq \hat{s}(\tau_0) \leq b_{\tau_0}$ . Piemēram, 4.10. attēlā signāls  $s(t)$  laika intervālā  $t \in [t_{n+1}, t_{n+2}]$  atrodas starp līmeņiem  $a_{\tau_0}$  un  $b_{\tau_0}$ , savukārt atjaunotā signāla vērtība  $\hat{s}(\tau_0)$ ,  $\tau_0 \in [t_{n+1}, t_{n+2}]$ , neatrodas starp šiem līmeņiem, līdz ar to ir jāveic  $\hat{s}(t)$  korekcija šajā vietā.



4.10. att. Atjaunotā signāla  $\hat{s}(t)$  nolases  $\hat{s}(\tau_0)$  neatbilstība oriģinālā signāla  $s(t)$  vērtību intervālam  $s(t) \in [a_{\tau_0}, b_{\tau_0}]$ ,  $t \in [t_{n+1}, t_{n+2}]$

Tālākajā izklāstā pieņemsim, ka doto LC nolašu  $s(t_n)$  skaits ir galīgs:  $n = [0, 1, \dots, N-1]$ , bet par bāzes funkcijām izvēlēsimies EFS funkcijas

$$q_m(t) = e^{jm \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)}, \quad (4.50)$$

kur  $\Theta = t_{N-1} - t_0$  un  $\Phi(t) = 2\pi \int_{t_0}^t \hat{f}_{max}(\tau) d\tau$  ar sākumvērtību  $\Phi(t_0) = 0$  un beigu vērtību  $\Phi(t_{N-1}) = \Phi(\Theta)$ . Rezultātā signāla (4.49) EFT spektrs saskaņā ar piemēru (3.63) pie funkcijas  $1/g(t) = \Phi'(t)$  ir joslā  $\omega_g \in [-2\pi M/\Phi(\Theta), 2\pi N/\Phi(\Theta)]$  ierobežots, un to pilnībā reprezentē nolases  $\hat{s}(\tau_k)$  ar izteiksmi

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{s}(\tau_k) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{Y}(\Phi(t) - \Phi(\tau_k))\right), \quad (4.51)$$

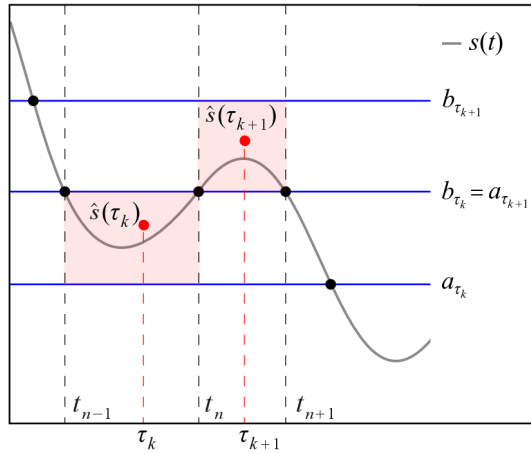
kur  $Y = \Phi(\Theta)/(2M)$  un  $\tau_k = \Phi^{-1}(kY)$ . Tā kā signāls  $\hat{s}(t)$  ir periodisks ar periodu  $\Theta$ , tad nolases  $\hat{s}(\tau_k)$  periodiski atkārtojas:  $\hat{s}(\tau_k) = \hat{s}(\tau_{k+2M})$ , un  $\Phi(\tau_{k+2M}) = \Phi(\tau_k) + \Phi(\Theta)$ , līdz ar to (4.51) var rakstīt:

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=0}^{2M-1} \hat{s}(\tau_k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{Y}(\Phi(t) - \Phi(\tau_k) - l\Phi(\Theta))\right) = \sum_{k=0}^{2M-1} \hat{s}(\tau_k) \hat{q}_k(t), \quad (4.52)$$

kur

$$\hat{q}_k(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{Y}(\Phi(t) - \Phi(\tau_k) - l\Phi(\Theta))\right). \quad (4.53)$$

Tā kā funkcijām  $\hat{q}_k(t)$  izpildās:  $\hat{q}_k(\tau_i) = \delta_{k,i}$ ,  $i = [0, 1, \dots, 2M-1]$ , tad atjaunotais signāls (4.52) laika momentos  $t = \tau_k$ ,  $k = [0, 1, \dots, 2M-1]$ , sakrīt ar nolašu  $\hat{s}(\tau_k)$  vērtībām, kurām saskaņā ar oriģinālo signālu  $s(t)$  jāatrodas starp diviem noteiktiem LC līmeņiem  $a_{\tau_k} \leq \hat{s}(\tau_k) \leq b_{\tau_k}$ . Piemēram, 4.11. attēlā nolasei  $\hat{s}(\tau_k)$  jāatrodas starp līmeņiem  $a_{\tau_k}$  un  $b_{\tau_k}$ , jo intervālā  $t \in [t_{n-1}, t_n]$  signāls  $s(t)$  atrodas starp šiem līmeņiem, savukārt intervālā  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  signāls atrodas starp līmeņiem  $a_{\tau_{k+1}}$  un  $b_{\tau_{k+1}}$ , līdz ar to nolasei  $\hat{s}(\tau_{k+1})$  jāatrodas starp  $a_{\tau_{k+1}}$  un  $b_{\tau_{k+1}}$ .



4.11. att. Meklējamo nolašu  $\hat{s}(\tau_k)$ ,  $\tau_k \in [t_{n-1}, t_n]$ , un  $\hat{s}(\tau_{k+1})$ ,  $\tau_{k+1} \in [t_n, t_{n+1}]$ , atļautie vērtību apgabali starp līmeņiem  $a_{\tau_k}$ ,  $b_{\tau_k}$  un  $a_{\tau_{k+1}}$ ,  $b_{\tau_{k+1}}$

Ņemot vērā šos ierobežojumus, kļūdas signāla enerģiju

$$E = \sum_{n=1}^{N-1} (s(t_n) - \hat{s}(t_n))^2 = \|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{s}}\|_2^2, \quad (4.54)$$

kur  $\mathbf{s} = [s(t_1), \dots, s(t_{N-1})]^T$  ir LC nolašu vektors, matricas  $\hat{\mathbf{Q}}$  elementi ir  $\hat{Q}_{n,k} = \hat{q}_k(t_n)$ , un  $\hat{\mathbf{s}} = [\hat{s}(\tau_0), \dots, \hat{s}(\tau_{2M-1})]^T$  ir nezināmo nolašu vektors, minimizē, ievērojot nosacījumu  $\mathbf{A} \leq \hat{\mathbf{s}} \leq \mathbf{B}$ , kur vektoru  $\mathbf{A}$  un  $\mathbf{B}$  elementi  $a_{\tau_k}$  un  $b_{\tau_k}$  ierobežo  $\hat{s}(\tau_k)$  vērtības atbilstoši nevienādībai  $a_{\tau_k} \leq \hat{s}(\tau_k) \leq b_{\tau_k}$ . Iegūtais minimizācijas uzdevums

$$\min_{\hat{\mathbf{s}}} \|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{s}}\|_2^2, \quad \text{jā } \mathbf{A} \leq \hat{\mathbf{s}} \leq \mathbf{B} \quad (4.55)$$

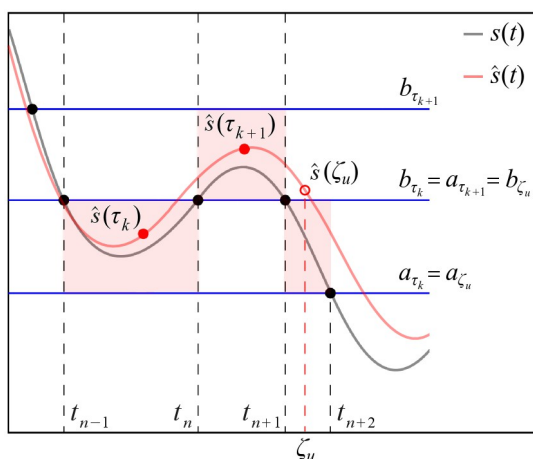
ir optimizācijas uzdevums, kura atrisināšanai var izmantot MATLAB funkciju *lsqlin* [22].

Pēc nolašu  $\hat{s}(\tau_k)$  aprēķina, tālāk jau var atrast signāla  $\hat{s}(t)$  vērtības brīvi izvēlētos laika momentos  $\dots < \zeta_{u-1} < \zeta_u < \zeta_{u+1} < \dots$ :

$$\hat{s}(\zeta_u) = \sum_{k=0}^{2M-1} \hat{s}(\tau_k) \hat{q}_k(\zeta_u), \quad (4.56)$$

kurām arī jāatrodas starp diviem noteiktiem LC līmeņiem  $a_{\zeta_u} \leq \hat{s}(\zeta_u) \leq b_{\zeta_u}$ . Piemērs tam

parādīts 4.12. attēlā – ar optimizācijas uzdevumu iegūtās nolases  $\hat{s}(\tau_k)$  un  $\hat{s}(\tau_{k+1})$  atrodas starp pareizajiem līmeņiem  $a_{\tau_k}, b_{\tau_k}$  un  $a_{\tau_{k+1}}, b_{\tau_{k+1}}$ , savukārt nolase  $\hat{s}(\zeta_u)$  laika momentā  $\zeta_u \in [t_{n+1}, t_{n+2}]$  atrodas ārpus atļautā vērtību apgabala  $[a_{\zeta_u}, b_{\zeta_u}]$ , kurā laika posmā no  $t_{n+1}$  līdz  $t_{n+2}$  ir zināms, ka atrodas oriģinālais signāls  $s(t)$ . Tāpēc, lai novērstu šādu neatbilstību, nevienādības  $a_{\tau_{k+1}} \leq \hat{s}(\tau_{k+1}) \leq b_{\tau_{k+1}}$  ietvaros var samazināt nolases  $\hat{s}(\tau_{k+1})$  vērtību, kas attiecīgi lokālā ap  $\tau_{k+1}$  izvietotā laika intervālā pabīdīs atjaunoto signālu  $\hat{s}(t)$  uz leju.



4.12. att. Atjaunotais signāls  $\hat{s}(t)$  ar nolasēm  $\hat{s}(\tau_k)$  un  $\hat{s}(\tau_{k+1})$  atļautajos vērtību apgabalos

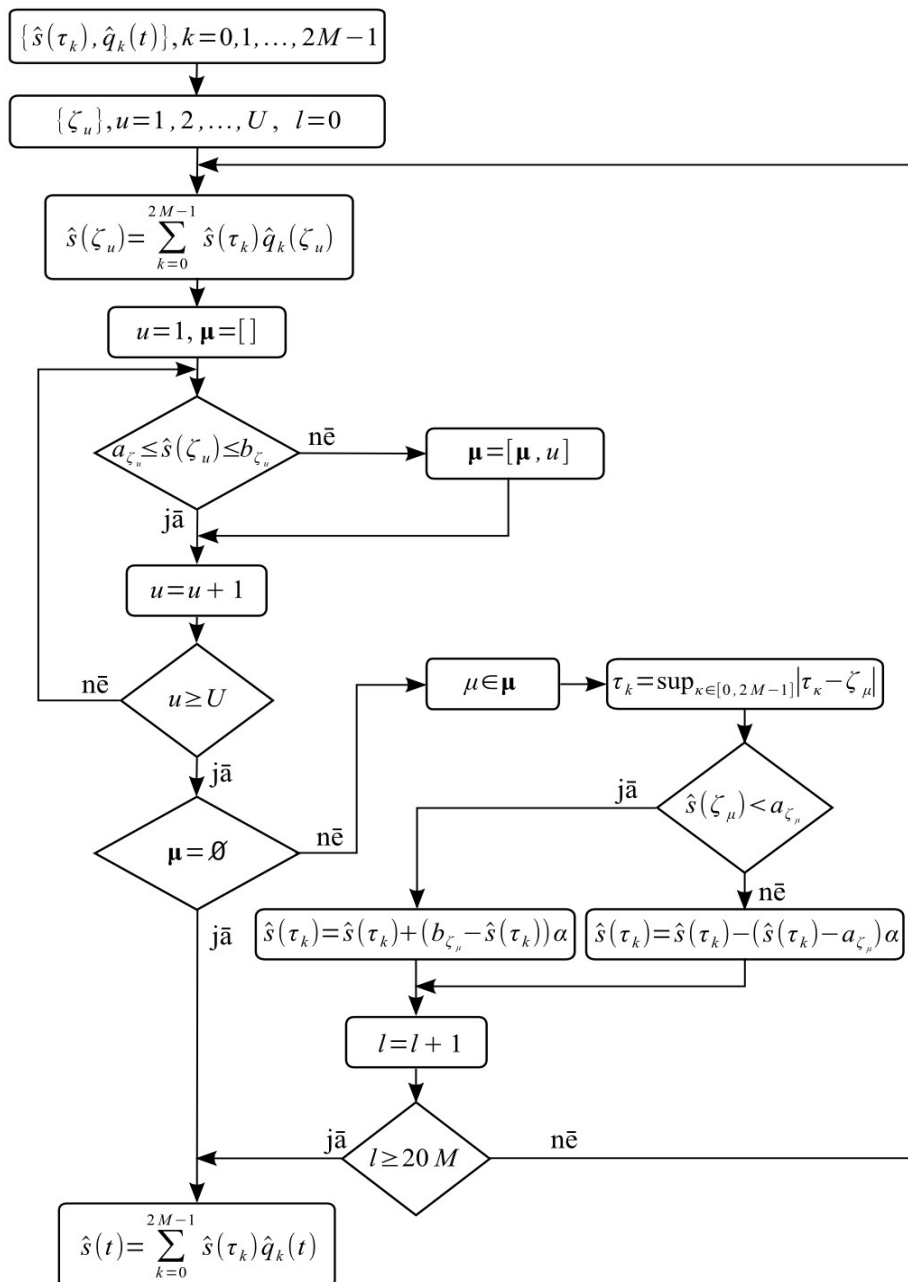
$$a_{\tau_k} \leq \hat{s}(\tau_k) \leq b_{\tau_k} \text{ un } a_{\tau_{k+1}} \leq \hat{s}(\tau_{k+1}) \leq b_{\tau_{k+1}}, \text{ un nolasi } \hat{s}(\zeta_u) \text{ ārpus atļautā apgabala } [a_{\zeta_u}, b_{\zeta_u}]$$

Algoritma blokshēma nolašu  $\hat{s}(\tau_k)$  korekcijai [IX] parādīta 4.13. attēlā. Algoritmam pamatā ir sekojošas darbības:

- 1) izvēlas vienmērīgi izvietotus laika momentus  $\{\zeta_u\}, u=1, 2, \dots, U$ , un aprēķina signāla  $\hat{s}(t)$  vērtības  $\hat{s}(\zeta_u)$ ;
- 2) atrod visus indeksus  $\mu_1 < \dots < \mu_i < \dots < \mu_l \in [1, U]$ , kuriem neizpildās nosacījums  $a_{\zeta_{\mu_i}} \leq \hat{s}(\zeta_{\mu_i}) \leq b_{\zeta_{\mu_i}}$ ;
- 3) no šiem indeksiem izvēlas vienu gadījum indeksu  $\mu$  un atrod laika momentam  $\zeta_{\mu}$  tuvāko  $\tau_k$  vērtību;
- 4) ja  $\hat{s}(\zeta_{\mu}) < a_{\zeta_{\mu}}$ , tad nolases  $\hat{s}(\tau_k)$  vērtību palielina par  $\alpha(b_{\tau_k} - \hat{s}(\tau_k))$ , bet ja  $\hat{s}(\zeta_{\mu}) > a_{\zeta_{\mu}}$ , tad šo vērtību samazina par  $\alpha(\hat{s}(\tau_k) - a_{\tau_k})$ , kur koeficients  $\alpha \in (0, 1)$  nosaka  $\hat{s}(\tau_k)$  izmaiņu straujumu;
- 5) atbilstoši jaunajai nolasei pārrēķina signāla  $\hat{s}(t)$  vērtības  $\hat{s}(\zeta_u)$ , un procedūra atkārto no 2. līdz 5. solim.

Algoritma izpildi pārtrauc, ja katram  $u$  izpildās  $a_{\zeta_u} \leq \hat{s}(\zeta_u) \leq b_{\zeta_u}$ , vai arī tiek sasniegts noteikts

iterāciju skaits.



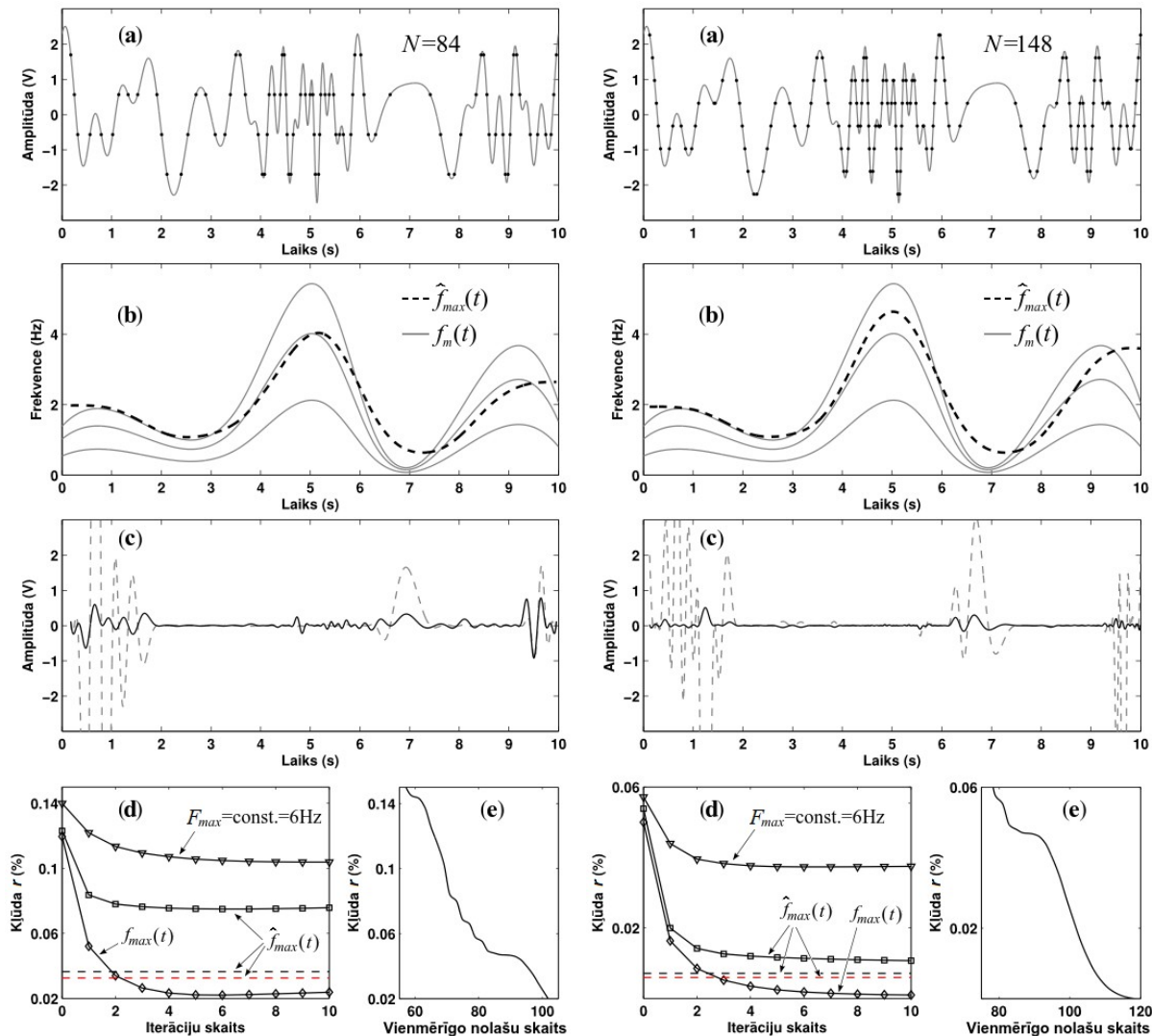
4.13. att. Nolašu  $\hat{s}(\tau_k)$  korekcijas algoritms

#### 4.4.6. LC diskretizācijas un atjaunošanas piemēri

Nodaļā apskatītās metodes pielietosim trīs signālu atjaunošanai no LC nolasēm.

**Pirmais signāls**  $s_1(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(k_m \psi(t))$  sastāv no  $M=3$  kosinusiem ar frekvencēm  $f_m(t) = k_m f(t) > 0$ , kur  $k_1 < k_2 < k_3$  ir dažādi koeficienti. Signālu diskretizē ar 4 un 8 līmeņiem, kas simetriski izvietoti ap nulles asi (4.14. attēls). Pirmajā gadījumā iegūst

$N=84$  nolases ar maksimālo attālumu  $\Delta t_{max}=0.82$  s, bet otrajā – 148 nolases ar maksimālo attālumu 0.98 s. Tātad, neskatoties uz nolašu skaita pieaugumu, maksimālais attālums starp nolasēm ir kļuvis lielāks.



4.14. att. Pirmā signāla atjaunošana no LC nolasēm, kas iegūtas no četriem (pa kreisi) un astoņu (pa labi) līmeņu šķērsojumiem: a) signāls (nepārtrauktā līnija) un tam atbilstošās LC nolases (melnie punkti), b) signālu veidojošo kosinusu frekvences  $f_m(t)$  (nepārtrauktās līnijas) un no LC nolasēm iegūtā maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  (svītrlīnija), c) starpības signāli starp oriģinālo un atjaunoto signālu, kas iegūti ar mazāko kvadrātu metodi bez nosacījumiem (svītrlīnija) un ar nosacījumiem (nepārtrauktā līnija), d) atjaunošanas kļūda atkarībā no pielietotās metodes – nepārtrauktās līnijas atbilst algoritmiem (4.29) (augšējā līnija) un (4.41) (apakšējās divas līnijas), svītrlīnijas atbilst mazāko kvadrātu metodei (4.55) pirms (augšējā svītrlīnija) un pēc (apakšējā svītrlīnija) nolašu korekcijas, e) signāla  $s(t)$  atjaunošanas kļūda atkarībā no vienmērīgo nolašu skaita

Pirmais solis ir signāla maksimālās momentānās frekvences  $\hat{f}_{max}(t)$  noteikšana ar 4.4.2. apakšnodaļā aprakstīto otro metodi (iegūtais rezultāts parādīts 4.14. attēlā (b) ar svītrlīniju), kam seko signāla atjaunošana ar algoritmiem (4.29) un (4.41) un mazāko kvadrātu metodēm (4.48) un (4.55). Katrā gadījumā iegūst atjaunoto signālu  $\hat{s}(t)$  un kļūdas signālu  $\varepsilon(t)=s(t)-\hat{s}(t)$ , no kura aprēķina atjaunošanas kļūdu

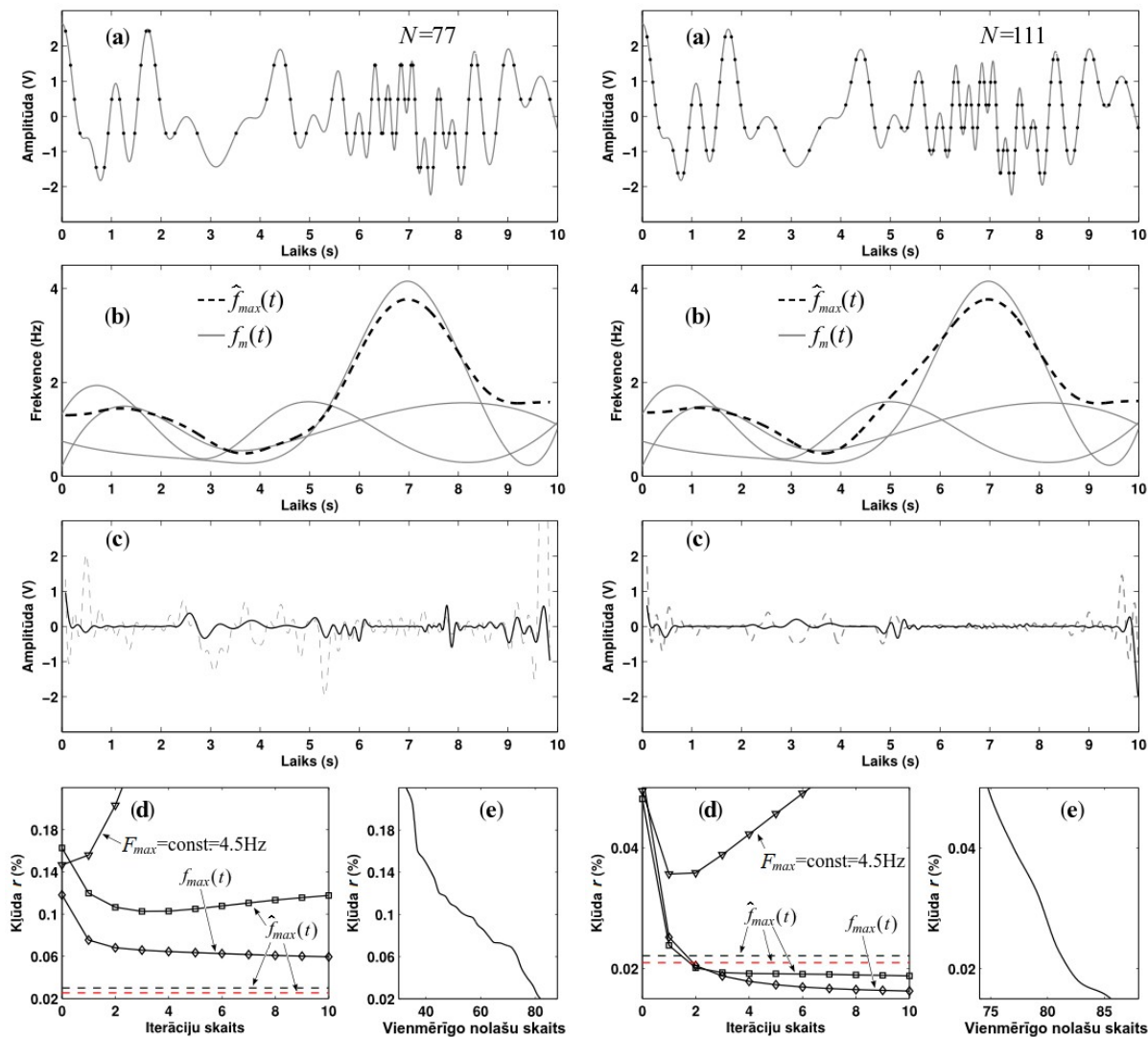
$$r = \frac{\int_{t_0}^{t_{N-1}} \varepsilon^2(t) dt}{\int_{t_0}^{t_{N-1}} s^2(t) dt}, \quad (4.57)$$

kas ir signālu  $\varepsilon(t)$  un  $s(t)$  enerģiju attiecība. Tā kā neizpildās nosacījumi (4.16) un (4.18), tad precīza atjaunošana nav sagaidāma. Piemēram, mazāko kvadrātu metodes (4.48) gadījumā lielie attālumi starp LC nolasēm rada lielu kļūdas signālu  $\varepsilon(t)$ , kas 4.14. attēlā (c) parādīts ar svītrlīniju. Kļūdas signālu (nepārtrauktā līnija) izdodas samazināt ierobežotā vērtību intervālā, kas praktiski nepārsniedz  $\Delta l$  sliekšni, kur  $\Delta l$  ir attālums starp blakus esošiem vienmērīgi izvietotiem LC līmeņiem, ja (4.48) vietā izmanto mazāko kvadrātu metodi (4.55), kas ierobežo atrisinājuma  $\hat{s}$  vērtību apgabalu, un tālāk veic iegūto nolašu  $\hat{s}$  korekciju saskaņā ar 4.13. attēlā parādīto algoritmu.

Iteratīvo algoritmu (4.29) un (4.41) signālu  $\varepsilon_i(t)=s(t)-\hat{s}_i(t)$  un  $s(t)$  enerģiju attiecība  $r(i)$  mainās atkarībā no iterāciju skaita  $i$ , kas parādīts 4.14. attēlā (d) ar nepārtrauktām līnijām. Augšējā līnija atbilst klasiskās filtrācijas algoritmam (4.29), ja filtra caurlaides josla ir  $F_{max}=6$  Hz, bet apakšējās divas – laikā mainīgas filtrācijas algoritmam (4.41), ja filtra caurlaides joslu maina saskaņā ar  $\hat{f}_{max}(t)$  (vidējā līnija) un  $f_{max}(t)$  (apakšējā līnija), kas definēta ar izteiksmi (3.76). Kā redzams, tad laikā mainīgas filtrācijas gadījumā iegūtais rezultāts ir labāks. Turpat ar horizontālām svītrlīnijām parādītas arī divas atjaunošanas kļūdas, kas atbilst mazāko kvadrātu metodei (4.55), ja neizmanto nolašu  $\hat{s}$  korekcijas algoritmu (augšējā svītrlīnija), un – ja izmanto (apakšējā svītrlīnija). Kā redzams, tad pēc korekcijas atjaunošanas kļūda nedaudz samazinās.

Ja LC vietā izmanto vienmērīgu diskretizāciju, tad signāla  $s(t)$  atjaunošanas kļūda mainās atkarībā no diskretizācijas frekvences  $f_d$ , kas nosaka signāla FT spektra ierobežošanu joslā līdz  $f_d/2$ . Atjaunošanas kļūda atkarībā no nolašu skaita  $f_d \Theta$ , kur  $\Theta=10$  s ir signāla garums, parādīta 4.14. attēlā (e). No (d) un (e) attēliem var aptuveni noteikt, cik nolases vienmērīgās diskretizācijas gadījumā ir nepieciešamas signāla vienlīdz precīzai reprezentācijai salīdzinājumā ar LC nolašu skaitu. Piemēram, 4.14. attēlā pa kreisi kļūdu  $r=0.03$ , ko LC gadījumā ar mazāko kvadrātu metodi (4.55) dod 84 LC nolases, vienmērīgās

diskretizācijas gadījumā iegūst no 96 nolasēm, savukārt 4.14. attēlā pa labi – kļūdu  $r=0.006$ , ko LC gadījumā dod 148 nolases, vienmērīgās diskretizācijas gadījumā iegūst no 109 nolasēm.



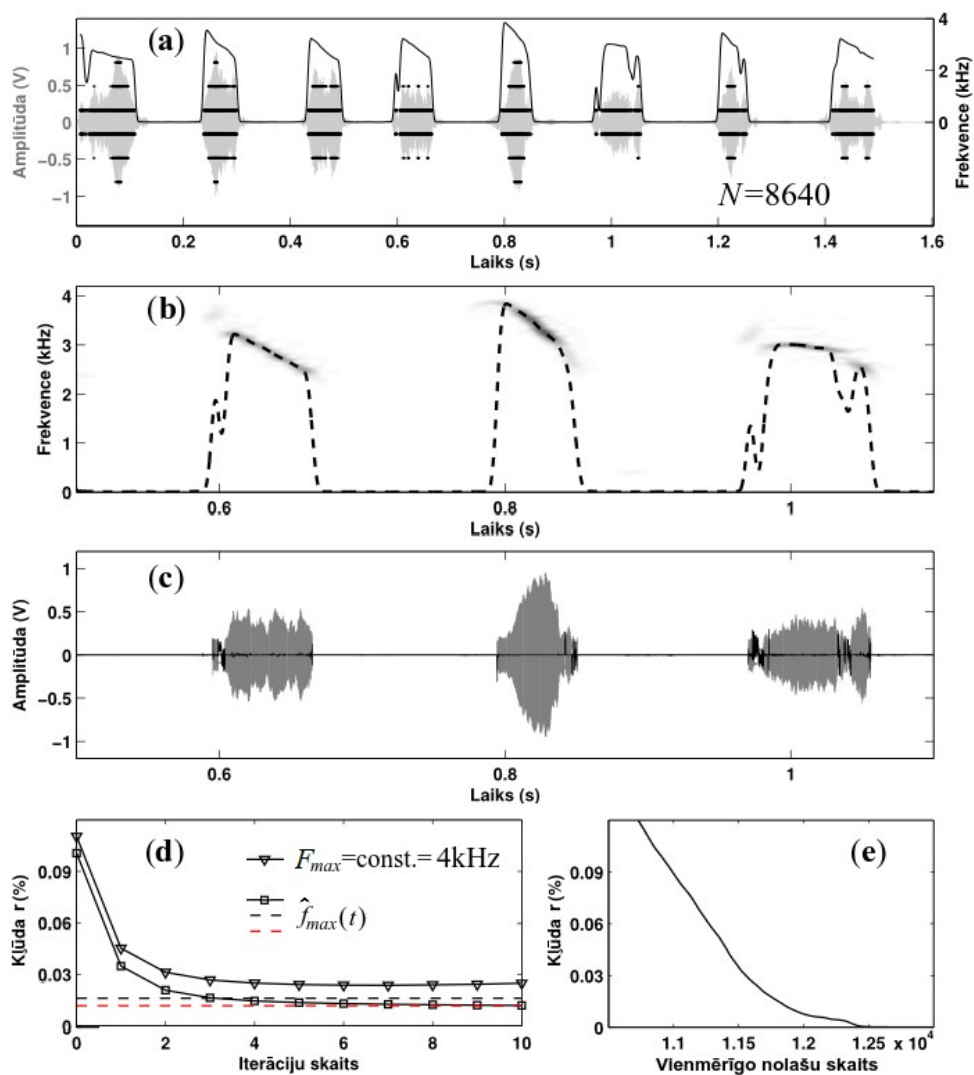
4.15. att. Otrā signāla atjaunošana no LC nolasēm, kas iegūtas no piecu (pa kreisi) un septiņu (pa labi) līmeņu šķērsojumiem: a) signāls (nepārtrauktā līnija) un tam atbilstošās LC nolases,

b) signālu veidojošo kosinusu frekvences  $f_m(t)$  un no LC nolasēm iegūtā maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$ , c) starpības signāli  $\varepsilon(t)$ , kas iegūti ar iteratīvo metodi (4.29) (svītrlīnija) un mazāko kvadrātu metodi (4.55) (nepārtrauktā līnija), d) atjaunošanas kļūda atkarībā no pielietotās metodes – nepārtrauktās līnijas atbilst algoritmiem (4.29) (augšējā līnija) un (4.41) (apakšējās divas līnijas), svītrlīnijas atbilst mazāko kvadrātu metodei (4.55) pirms (augšējā svītrlīnija) un pēc (apakšējā svītrlīnija) nolašu korekcijas, e) signāla  $s(t)$  atjaunošanas kļūda atkarībā no vienmērīgo nolašu skaita

**Otrais signāls**  $s_2(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(\psi_m(t))$  sastāv no  $M=3$  kosinusiem ar dažādām frekvencēm  $f_m(t) > 0$  (4.15. attēls). Pēc signāla LC diskretizācijas ar 5 (pa kreisi) un 7 (pa labi) vienmērīgi izvietotiem līmeņiem iegūst 77 un 111 LC nolases ar maksimālajiem attālumiem  $\Delta t_{max} = 0.79$  un  $0.52$  s. Līdzīgi kā iepriekš, sākumā atrod funkciju  $\hat{f}_{max}(t)$  un tālāk veic signāla atjaunošanu. Piecu līmeņu gadījumā labāko rezultātu dod mazāko kvadrātu metode ar ierobežotām nolašu  $\hat{s}$  vērtībām, savukārt septiņu līmeņu gadījumā – iteratīvais algoritms ar laikā mainīgu filtrāciju atbilstoši funkcijām  $\hat{f}_{max}(t)$  un  $f_{max}(t)$ . No (d) attēla arī redzams, ka klasiskās filtrācijas gadījumā algoritms (4.29) strauji diverģē un dod lielu kļūdas signālu  $\varepsilon(t)$ , kas 4.15. attēlā (c) parādīts ar svītrlīniju.

**Trešais signāls** ir līdz 4 kHz ierobežots 1.6 sekundes garš putna balss signāls, kas diskretizēts ar sešiem simetriski ap nulles asi vienmērīgi izvietotiem līmeņiem (4.16. attēls). Rezultātā iegūst 8640 LC nolases, no kurām sākumā atrod signāla maksimālo momentāno frekvenci  $\hat{f}_{max}(t)$ , kas 4.16. attēlā (a) parādīta ar melno nepārtraukto līniju, bet attēlā (b) – ar svītrlīniju kopā ar signāla STFT laika-frekvences sadalījumu. Pēc  $\hat{f}_{max}(t)$  noteikšanas seko signāla atjaunošana, ko veic atsevišķi pa fragmentiem, kuros signāls ir aktīvs (pavisam ir 8 fragmenti). Rezultātā pēc 10 iterācijām ar algoritmu (4.41) iegūtie 3 signāla fragmenti ar pelēko krāsu parādīti 4.16. attēlā (c), bet kļūdas signāls  $\varepsilon(t)$  – ar melno krāsu. Visu fragmentu atjaunošanas kļūda atkarībā no iterāciju skaita parādīta 4.16. attēlā (d). Kā redzams, tad līdzīgu rezultātu dod mazāko kvadrātu metode (4.55), bet nedaudz sliktāku rezultātu – iteratīvais algoritms ar klasisko filtrāciju.

Ja signāla reprezentācijai izmanto vienmērīgo diskretizāciju, tad atkarībā no nolašu skaita  $f_d \Theta$  iegūst 4.16. attēlā (e) parādīto atjaunošanas kļūdu. No (d) un (e) attēliem izriet, ka LC gadījumā kļūdu  $r=0.01$  dod 8640 nolases, bet vienmērīgās diskretizācijas gadījumā – 11900 nolases. Šāds LC nolašu skaita samazinājums salīdzinājumā ar vienmērīgo diskretizāciju būs jo lielāks, jo garāki būs laika intervāli starp signāla aktīvajiem periodiem.



4.16. att. Putna balss signāla atjaunošana no LC nolasēm, kas iegūtas no sešu līmeņu šķērsojumiem: a) signāls un tam atbilstošās LC nolases, un no tām iegūtā maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  (melnā līnija), b) signāla fragmenta STFT laika-frekvences sadalījums un maksimālā momentānā frekvence  $\hat{f}_{max}(t)$  (svītrlīnija), c) atjaunotais (pelēkā krāsā) un starpības (melnā krāsā) signāli  $\varepsilon(t)$ , kas iegūti ar iteratīvo metodi (4.41), d) atjaunošanas kļūda atkarībā no metodes – nepārtrauktās līnijas atbilst algoritmiem (4.29) (augšējā līnija) un (4.41) (apakšējā līnija), svītrlīnijas atbilst mazāko kvadrātu metodei (4.55) pirms (augšējā svītrlīnija) un pēc (apakšējā svītrlīnija) nolašu korekcijas, e) signāla  $s(t)$  atjaunošanas kļūda atkarībā no vienmērīgo nolašu skaita

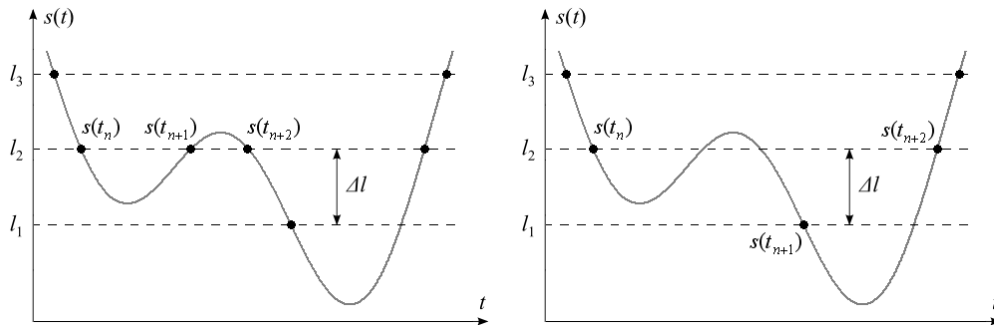
## 4.5. Kopsavilkums

Ceturtajā nodaļā ir apskatīta LC diskretizācija, saskaņā ar kuru signāla nolases tiek ņemtas signāla un iepriekš uzdotu līmeņu šķērsojumu vietās. Šāda analogs-ciparu pārveidojuma rezultātā iegūst laikā nevienmērīgi izvietotas nolases, attālumi starp kurām ir atkarīgi ne tikai no uzdotajiem līmeņiem, bet arī no signāla maksimālās momentānās frekvences. Šāda pieeja ļauj vienkāršot datu iegūvi, bet sarežģītāku padara to pēcstrādi, saistībā ar kuru autors:

- 1) izstrādājis metodes signālu maksimālās momentānās frekvences noteikšanai no LC nolasēm;
- 2) formulējis pietiekamo nosacījumu signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, saskaņā ar kuru atjaunošana ir iespējama pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli, kas ir klasiskais ierobežojums literatūrā sastopamajām metodēm;
- 3) atbilstoši formulētajam nosacījumam piedāvājis vairākas metodes signālu atjaunošanai no LC nolasēm, kuras visas var realizēt saskaņā ar divām pieejām – sākumā veic transformētā laika signāla atjaunošanu un tad ar inverso pārveidojumu iegūst pašu signālu (laika transformācijai un inversajam pārveidojumam izmanto no LC nolasēm iegūto maksimālo momentāni frekvenci), vai arī – ar pirmajā gadījumā lietoto metožu modificētajām versijām veic signāla tiešu atjaunošanu;
- 4) ar vairākiem signālu atjaunošanas piemēriem veicis izstrādāto metožu pārbaudi un iegūto rezultātu salīdzinājumus, kas ļauj secināt, ka signālatkarīgās teorijas pielietojums LC gadījumā paaugstina signālu atjaunošanas precizitāti.

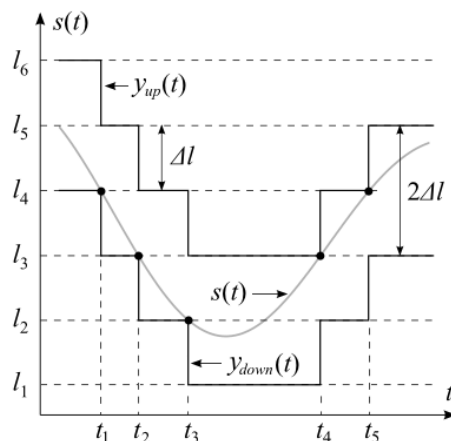
## 5. LC DISKRETIZĀCIJAS PRAKTISKĀ REALIZĀCIJA

Ceturtajā nodaļā apskatītais LC pārveidojums ir realizēts arī praktiski. Lai samazinātu trokšņa ietekmi un izvairītos no pārāk īsiem laika intervāliem starp secīgām nolāsēm, kas var radīt kļūdu pārveidojumā, tad katru nākamo LC nolasi ņem tikai tad, kad signāla izmaiņa no iepriekšējās nolases vērtības sasniedz noteiktu delta sliekšni  $\Delta l$  (5.1. attēls pa labi).



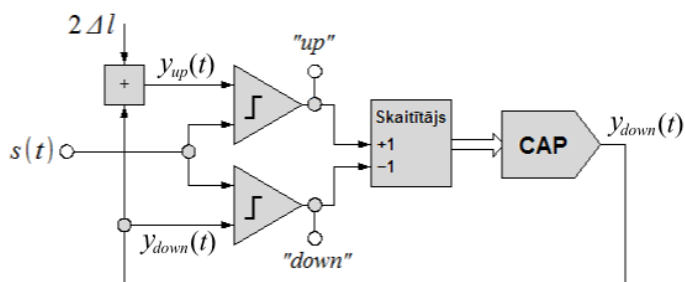
5.1. att. Līmeņu-šķērsojumu (pa kreisi) un delta-izmaiņu (pa labi) diskretizācija

Šādu delta-izmaiņu pārveidojumu var realizēt pēc sekojoša principa (5.2. attēls). Ieejas signāls  $s(t)$  laika intervālā līdz  $t_1$  atrodas starp diviem līmeņiem:  $y_{down}(t)=l_4$  un  $y_{up}(t)=l_4 + 2\Delta l=l_6$ . Signālam samazinoties un laika momentā  $t_1$  šķērsojot apakšējo līmeni  $l_4$ , signālu  $y_{down}(t)$  un  $y_{up}(t)$  vērtības tiek samazinātas par  $\Delta l$ , kā rezultātā signāls laika intervālā no  $t_1$  līdz  $t_2$  atrodas starp jaunajiem līmeņiem  $y_{down}(t)=l_3$  un  $y_{up}(t)=l_3 + 2\Delta l=l_5$ . Līdzīgā veidā tiek mainītas  $y_{down}(t)$  un  $y_{up}(t)$  vērtības laika momentos  $t_2$  un  $t_3$ , kā rezultātā signāls laika intervālā no  $t_3$  līdz  $t_4$  atrodas starp līmeņiem  $y_{down}(t)=l_1$  un  $y_{up}(t)=l_1 + 2\Delta l=l_3$ . Savukārt laika momentos  $t_4$  un  $t_5$ , kad signāls pieaug un šķērso augšējos līmeņus  $l_3$  un  $l_4$ ,  $y_{down}(t)$  un  $y_{up}(t)$  vērtības tiek palielinātas par  $\Delta l$ . Rezultātā signāls  $s(t)$  praktiski vienmēr atrodas starp līmeņiem  $y_{down}(t)$  un  $y_{up}(t)$ , kurus šķērsojot tiek fiksētas signāla LC nolases.



5.2. att. Delta-izmaiņu praktiskās realizācijas darbības principa ilustrējums

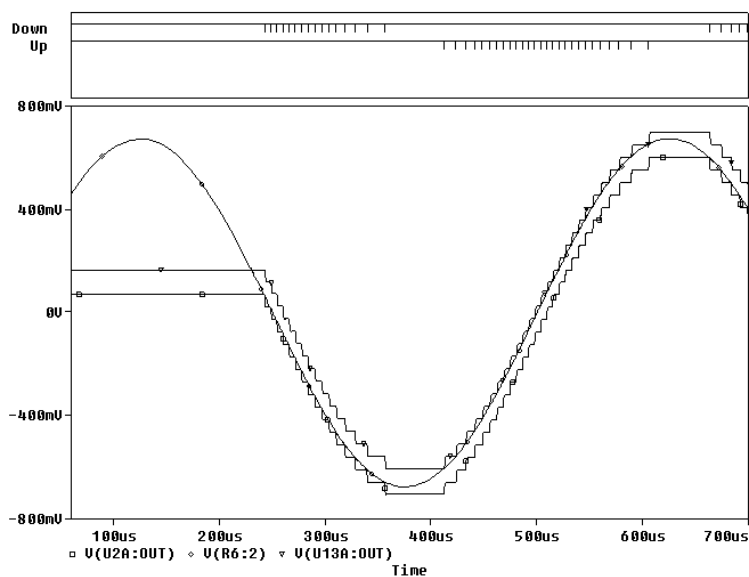
Aprakstīto delta-izmaiņu pārveidojuma principu var realizēt saskaņā ar 5.3. attēlā parādīto blokshēmu.



5.3. att. Delta-izmaiņu diskretizācijas blokshēma

Ieejas signāls  $s(t)$  tiek pievadīts diviem komparatoriem, kuri to salīdzina ar sprieguma līmeņiem  $y_{down}(t)$  un  $y_{up}(t) = y_{down}(t) + 2\Delta l$ , turklāt  $y_{down}(t) < s(t) < y_{up}(t)$ . Ja signāls pieaug un šķērso līmeni  $y_{up}(t)$ , tad nostrādā augšējais komparators, kas skaitītāja izejas ciparu vērtību palielina par “+1”, kā rezultātā CAP izejas spriegums  $y_{down}(t)$  palielinās par  $\Delta l$ , un izpildās nevienādība  $y_{down}(t) < s(t) < y_{up}(t)$ . Ja signāls samazinās un šķērso līmeni  $y_{down}(t)$ , tad nostrādā apakšējais komparators, kas skaitītāja izejas ciparu vērtību samazina par “-1”, kā rezultātā CAP izejas spriegums  $y_{down}(t)$  samazinās par  $\Delta l$ , un atkal izpildās nevienādība  $y_{down}(t) < s(t) < y_{up}(t)$ .

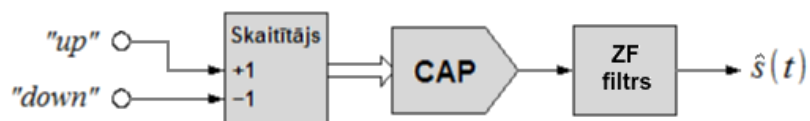
5.3. attēlā parādītajai blokshēmai atbilstošā elektroniskā shēma, kas modelētā PSpice vidē, dota 8. pielikumā. Tā realizē 32 līmeņu pārveidojumu ar attālumu starp līmeņiem  $\Delta l = 50\text{mV}$ . Shēmas simulācijas rezultāts, ja ieejas signāls ir 2 kHz sinusoīda, parādīts 5.4. attēlā.



5.4. att. Sinusoidāla signāla 32 līmeņu delta-izmaiņu diskretizācija

Kā redzams, tad diskretizācija sākas no brīža, kad signāls samazinās un šķērso apakšējo līmeni, kura sākuma vērtība ir aptuveni 70 mV. Augšā parādītos ciparu signālus “up” un

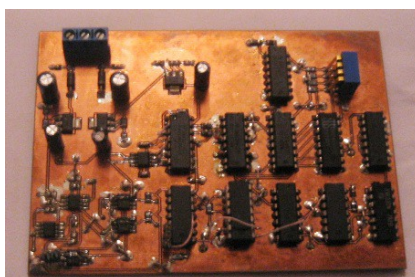
“down”, kas maina skaitītāja izejas ciparu vērtību un attiecīgi arī CAP izejas signālu  $y_{down}(t)$ , var izmantot signālu  $s(t)$  aptuveni atjaunošanai saskaņā ar 5.5. attēlā parādīto blokhēmu.



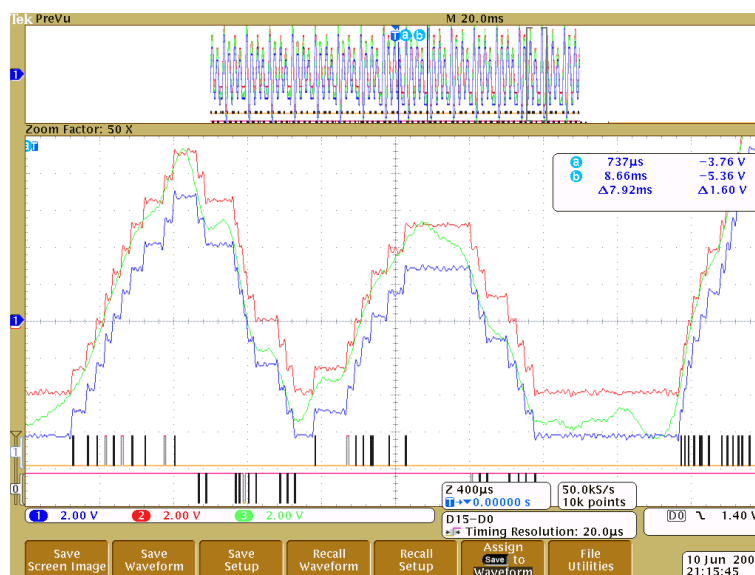
5.5. att. Delta-izmaiņu diskretizācijas atjaunotāja blokhēma

CAP izejas signāls šajā gadījumā sakrīt ar kāpņveida signālu, kura nogludināšanai izmanto zemo frekvenču filtru.

Pēc līdzības ar 8. pielikumā doto elektronisko shēmu ir izgatavota 5.6. attēlā parādītā iespiedplate, kurā realizēti 16 diskretizācijas līmeņi, kas vienmērīgi izvietoti diapazonā no -10V līdz +10V. Ar osciloskopu uzņemtais runas signāla delta-izmaiņu diskretizācijas rezultāts parādīts 5.7. attēlā. Kā tika secināts no mērījumiem, tad izstrādātā plate spēj diskretizēt signālus joslā līdz 10 kHz, bet pie lielākām frekvencēm līmeņi  $y_{up}(t)$  un  $y_{down}(t)$  vairs nespēj izsekot signāla izmaiņām.



5.6. att. Iespiedplate signālu diskretizācijai pēc delta-izmaiņu principa



5.7. att. Ar osciloskopu uzņemtie runas signāla (zaļā līnija) delta-izmaiņu diskretizācijas signāli: zilā līnija atbilst CAP izejai  $y_{down}(t)$ , sarkanā līnija – signālam  $y_{up}(t)$ , un zemāk redzamās divas melnās krāsas impulsu virknes – “up” un “down” ciparu signāliem

## Nobeigums

Promocijas darba mērķis bija izpētīt un teorētiski pamatot, kā atkarībā no signāla laikā mainīgās aktivitātes (spektrālā sastāva) izvēlēties nolašu izvietojumu laikā, lai tās precīzi reprezentētu analogo signālu, kā arī izpētīt, vai šīs zināšanas var izmantot signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas iegūtas signālatkarīgu pārveidojumu rezultātā.

Atbilstoši mērķa sasniegšanai izvirzītajam uzdevumam: izstrādāt teoriju un metodes signālu signālatkarīgai diskretizācijai un atjaunošanai, autors ir ieguvis šādus galvenos rezultātus:

1. Ieguvis paplašināto Furjē rindu periodisku signālu izvērsei trigonometrisku funkciju rindā ar laikā mainīgām frekvencēm, kas ļauj ar samazinātu koeficientu skaitu reprezentēt nestacionārus signālus, kuru spektrālie sastāvi ir laikā mainīgi (to demonstrē 3.6.2. apakšnodaļā parādītie piemēri).
2. Formulējis paplašināto nolašu teorēmu signālu diskretizācijai saskaņā ar brīvi izvēlētu monotoni augošu funkciju  $\Phi(t)$ .
3. Izstrādājis signāla maksimālās momentānās frekvences  $\hat{f}_{max}(t)$  noteikšanas metodes, lai tālāk šo frekvenci izmantotu signālu signālatkarīgai diskretizācijai saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu: no  $\hat{f}_{max}(t)$  atrod  $\Phi(t)$ , bet no  $\Phi(t)$  – nolašu laika pozīcijas  $t_n = \Phi^{-1}(n \gamma)$ . Rezultātā tiek atbildēts uz darba mērķi izvirzīto pirmo jautājumu par nolašu izvietojumu atkarībā no signāla laikā mainīgā spektrālā sastāva, ko reprezentē funkcija  $\hat{f}_{max}(t)$ .
4. Balstoties uz paplašināto nolašu teorēmu, formulējis pietiekamo nosacījumu (4.18) signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas kļūst iespējams pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli. Šis rezultāts ļauj atbildēt uz darba mērķi izvirzīto otro jautājumu par izstrādātās teorijas pielietojumu signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas iegūtas signālatkarīgu pārveidojumu rezultātā.
5. Atbilstoši formulētajam nosacījumam (4.18) piedāvājis vairākas metodes signālu atjaunošanai no LC nolasēm, viena no kurām (mazāko kvadrātu metode ar nosacījumiem) izmanto zināšanas par signāla ierobežotajiem vērtību apgabaliem laika intervālos starp secīgām LC nolasēm.
6. Veicis izstrādāto signālatkarīgo metožu simulācijas MATLAB vidē un sniedzis iegūto rezultātu novērtējumu un secinājumus.

7. Izstrādājis signālatkarīga analogs-ciparu pārveidotāja iespiedplati, kas darbojas pēc līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas principa.

Ņemot vērā uzskaitītos rezultātus, var secināt, ka promocijas darbā izvirzītais mērķis ir sasniegts.

## Literatūra

1. Allen R.L., Mills D.W. *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure*. - Wiley, 2004. - p. 966.
2. Allier E., Sicard G., Fesquet L. *A New Class of Asynchronous A/D Converters Based on Time Quantization*// *Proc. Ninth International Symposium on Asynchronous Circuits and Systems*. - 2003. - pp. 196–205.
3. Bachman G., Narici L. *Functional Analysis*. - New York: Dover Publications, 1998. - 544 p.
4. Baraniuk R., Davenport M., DeVore R., Wakin M. *A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices*// *Constructive Approximation*. - 2008. - vol. 28(3). - pp. 253–263.
5. Baron D., Wakin M.B., Duarte M.F., Sarvotham S., Baraniuk R.G. *Distributed compressed sensing*. - 2005.
6. Bellers E., de Haan G. *New algorithm for motion estimation on interlaced video*// *Proc. SPIE Visual Communication and Image Processing*. - 1998. - vol. 3309. - pp. 111–121.
7. Benedicks M. *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure*// *J. Math. Anal. Appl.* - 1985. - vol. 106(1). - pp. 180–183.
8. Beutler F.J. *Error Free Recovery from Irregularly Spaced Samples*// *SIAM Review*. - 1966. - vol. 8(3). - pp. 328–335.
9. Bilinskis I. *Digital Alias-free Signal Processing*. - UK: Wiley, 2007. - 454 p.
10. Bilinskis I., Mikelsons A. *Randomized Signal Processing*. - London: Prentice Hall, 1992. - 329 p.
11. Blu T., Unser M. *Approximation error for quasi-interpolators and (multi-) wavelet expansions*// *Appl. Computat. Harmonic Anal.* - 1999. - vol. 6(2). - pp. 219–251.
12. Brown J.L. *On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the bandpass sampling theorem*// *J. Math. Anal. Appl.* - 1967. - vol. 18. - pp. 75–84.
13. Butzer P.L. *A survey of the Whittaker–Shannon sampling theorem and some of its extensions*// *J. Math. Res. Exposit.* - 1983. - vol. 3. - pp. 185–212.
14. Butzer P.L., Stens R.L. *Sampling theory for not-necessarily band-limited functions: A historical overview*// *SIAM Rev.* - 1992. - vol. 34. - pp. 40–53.
15. Candès E., Romberg J., Tao T. *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*// *IEEE Trans. Inform. Theory*. - 2006. - vol. 52(2). - pp. 489–509.

16. Candès E., Tao T. *Decoding by linear programming// IEEE Trans. Inform. Theory.* - 2005. - vol. 51(12). - pp. 4203–4215.
17. Chandrasekhar S., Sreenivas T.V. *Instantaneous frequency estimation using level-crossing information// Proc. ICASSP 2003.* - 2003. - vol. 6. - pp. 141–144.
18. Chitode Dr.J.S. *Signals And Systems.* - Technical Publications Pune, 2009. - 804. p.
19. Clark J.J., Palmer M.R., Lawrence P.D. *A transformation method for the reconstruction of functions from nonuniformly spaced samples// IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* - 1985. - vol. 33(4). - pp. 1151–1165.
20. Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.C. *Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets// Commun. Pure Appl. Math.* - 1992. - vol. 45. - pp. 485–560.
21. Cohen L. *Time-frequency distributions-a review// Proc. IEEE.* - 1989. - vol. 77(7). - pp. 941–981.
22. Coleman T., Branch M.A., Grace A. *Optimization Toolbox For Use with MATLAB: User's Guide v.2.* - 1999. - 305. p.
23. Daubechies I. *Orthogonal bases of compactly supported wavelets// Communications on Pure and Applied Mathematics .* - 1988. - vol. 41. - pp. 909–996.
24. De Boor C. *A Practical Guide to Splines.* - New York: Springer-Verlag, 1978. - 392 p.
25. Donoho D. *Compressed sensing// IEEE Trans. Inform. Theory.* - 2006. - vol. 52(4). - pp. 1289–1306.
26. Eldar Y.C., Kutyniok G. *Compressed Sensing: Theory and Applications.* - New York: Cambridge University Press, 2012. - 556 p.
27. Ellis P.H. *Extension of phase plane analysis to quantized systems// IRE Transactions on Automatic Control.* - 1959. - vol. 4(2). - pp. 43–54.
28. Feichtinger H.G., Gröchenig K. *Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions// J. Math. Anal. Appl.* - 1992. - vol. 167(2). - pp. 530–556.
29. Feichtinger H.G., Gröchenig K. *Theory and practice of irregular sampling// Benedetto J.J, Frazier M.W. Wavelets: Mathematics and Applications.* - Boca Raton: CRC Press, 1994. - pp. 305–363.
30. Figueiredo M.A.T., Nowak R.D., Wright S.J. *Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems// IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing.* - 2007. - vol. 1(4). - pp. 586–597.
31. Flammer C. *Spheroidal Wave Function.* - CA: Stanford Univ. Press, 1957. - 220 p.
32. Greitans M. *Time-Frequency Representation Based Chirp-Like Signal Analysis Using Multiple Level Crossings// Proc. EUSIPCO 2007.* - 2007, Poznan, Poland. - pp. 2254–

- 2258.
33. Greitans M., Homjakovs I. *Enhanced Digital Signal Processing of Signal-dependently Sampled Data*// *Electronics and Electrical Engineering - Kaunas: Technologija*. - 2006. - vol. 68(4). - pp.9-14.
  34. Gröchenig K. *Reconstruction algorithms in irregular sampling*// *Math. Comp.* - 1992. - vol. 59(199). - pp. 181–194.
  35. Hanzo L.L., Somerville C., Woodard J. *Voice and Audio Compression for Wireless Communications*. - John Wiley & Sons, 2008. - 880. p.
  36. Hemani A., Meincke T., Kumar S., Postula A., Olsson T., Nilsson P., Oberg J., Ellervee P., Lundqvist D. *Lowering power consumption in clock by using globally asynchronous locally synchronous design style*// *Proc. 36th Design Automation Conference*. - 1999, New Orleans, USA. - pp. 873–878.
  37. Huang N.E., Shen Z., Long S., Wu M.C., Shih H.H., Zheng Q., Yen N.-C., Tung C.C., Liu H.H. *The Empirical Mode Decomposition and Hilbert Spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis*// *Proc. R. Soc. London A*. - 1998. - vol. 454(1971). - pp. 903–995.
  38. Jerri A.J. *Some applications for Kramer's generalized sampling theorem*// *Journal of Engineering Mathematics*. - 1969. - vol. 3(2). - pp. 103–105.
  39. Jerri A.J. *The Shannon sampling theorem – Its various extensions and applications: A tutorial review*// *Proc. IEEE*. - 1977. - vol. 65. - pp. 1565–1596.
  40. Kikkert C.J., Miller D.J. *Asynchronous delta sigma modulation*// *Proc. IREE*. - 1975. - vol. 36. - pp. 83–88.
  41. Kinniment D.J., Gao B., Yakovlev A.V., Xia F. *Towards asynchronous A-D conversion*// *Proc. Fourth International Symposium on Advanced Research in Asynchronous Circuits and Systems*. - 1998. - pp. 206–215.
  42. Kinniment D.J., Yakovlev A.V., Gao B. *Synchronous and asynchronous A-D conversion*// *IEEE Trans. on Very Large Integration Systems*. - 2000. - vol. 8(2). - pp. 217–220.
  43. Kotel'nikov V. A. *On the transmission capacity of "ether" and wire in electrocommunications*// *Izd. Red. Upr. Svyazzi RKKA (Moscow)*. - 1933.
  44. Kozin M., Volkov V., Svergun D. *A compact algorithm for evaluating linear prolate functions*// *IEEE Trans. Signal Process.* - 1997. - vol. 45. - pp. 1075–1077.
  45. Kramer H.P. *A generalized sampling theorem*// *J. Math. Phys.* - 1959. - vol. 38. - pp. 68–72.
  46. Kurchuk M., Tsividis Y. *Digital Signal Processing in Continuous Time*. - CMOSSET 2010

*Circuits Track Presentation Slides: CMOS Emerging Technologies, 2010.*

47. Landau H.J. *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*// *Acta Math.* - 1967. - vol. 117. - pp. 37–52.
48. Landau H.J., Pollak H.O. *Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty-II*// *Bell Syst. Tech. J.* - 1961. - vol. 40. - pp. 65–84.
49. Lazar A.A., Simonyi E.K., Tóth L.T. *Time Encoding of Bandlimited Signals, an Overview*// *Proc. ICTSM 2005.* - 2005, Dallas, USA.
50. Lazar A.A., Tóth L.T. *Perfect recovery and sensitivity analysis of time encoded bandlimited signals*// *IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Regular Papers.* - 2004. - vol. 51(10). - pp. 2060–2073.
51. Lee H., Bien Z. *A Variable Bandwidth Filter for Estimation of Instantaneous Frequency and Reconstruction of Signals With Time-Varying Spectral Content*// *IEEE Trans. on Signal Processing.* - 2011. - vol. 59(5). - pp. 2052–2071.
52. Lee H., Bien Z. *Linear Time-Varying Filter with Variable Bandwidth*// *Proc. ISCAS 2006.* - 2006, Kos, Greece.
53. Lin Z., McCallum R.W., Wang H. *Computation and performance of the prolate-spheroidal wave function window in spectral estimation*// *Proc. ICASSP-96.* - 1996. - vol. 5. - pp. 2976–2978.
54. Logan B.F. *Information in the zero crossings of band-pass signals*// *The Bell Systems Technical Journal.* - 1977. - vol. 56. - pp. 487–510.
55. Mallat S. *A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*// *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* - 1989. - vol. 11. - pp. 674–693.
56. Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* - CA: Academic Press, 1999. - 620 p.
57. Mallat S. *Multiresolution approximations and wavelet orthogonal bases of  $L_2(\mathbb{R})$* // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1989. - vol. 315. - pp. 69–87.
58. Mark J.W., Todd T.D. *A nonuniform sampling approach to data compression*// *IEEE Trans. on Communications.* - 1981. - vol. 29(1). - pp. 24–32.
59. Martin A.J., Nystrom M., Wong C.G. *Three generations of asynchronous micro-processors*// *IEEE Design and Test of Computers.* - 2003. - vol. 20(6). - pp. 9–17.
60. Marvasti F. *Nonuniform Sampling Theory and Practice.* - New York: Kluwer academic/Plenum Publishers, 2001. - 924 p.
61. Mikelsons A. *Alias-free spectral estimation of signals with components of arbitrary frequencies*// *Proc. COST 229.* - 1994. - pp. 105-108.
62. Nazario M.A. *Signal Recovery in Sinusoid-Crossing Sampling by use of the Minimum-*

- Negativity Constraint// Applied Optics.* - 1998. - vol. 37(14). - pp. 2953–2963.
63. Papoulis A. *Generalized sampling expansion// IEEE Trans. Circuits Syst.* - 1977. - vol. 24. - pp. 652–654.
64. Parker J.A., Kenyon R.V., Troxel D.E. *Comparison of interpolating methods for image resampling// IEEE Trans. Med. Imaging.* - 1983. - vol. MI-2(1). - pp. 31–39.
65. Prandoni P., Vetterli M. *Signal processing for communications*. - Lausanne: EPFL Press, 2008. - 371 p.
66. Qaisar. S.M. *Signal Driven Sampling and Processing: A Promising Approach for Computationally Efficient Adaptive Rate Solutions// PhD thesis*. - Grenoble INP, Laboratory TIMA, Group CIS. - 2009. - 233. p.
67. Raghavendra C.S., Sivalingam K.M., Znati T.F. *Wireless sensor networks*. - New York: Springer, 2004. - 426 p.
68. Requicha A.G. *The zeros of entire functions: theory and engineering applications// Proc. IEEE.* - 1980. - vol. 68(3). - pp. 308–328.
69. Sayiner N., Sorensen H.V., Viswanathan T.R. *A level-crossing sampling scheme for A/D conversion// IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing.* - 1996. - vol. 43(4). - pp. 335–339.
70. Seip K. *An irregular sampling theorem for functions bandlimited in a generalized sense// SIAM J. Appl. Math.* - 1987. - vol. 47(5). - pp. 1112–1116.
71. Senay S., Chaparro L.F., Akan A. *Sampling and reconstruction of non-bandlimited signals using slepian functions// Proc. EUSIPCO 2008.* - 2008, Lausanne, Switzerland.
72. Shannon C.E. *Communication in the presence of noise// Proc. of the IRE.* - 1949. - vol. 37(1). - pp. 10–21.
73. Slepian D. *On bandwidth// Proc. IEEE.* - 1976. - vol. 64(3). - pp. 292–300.
74. Slepian D., Pollak H.O. *Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty-I// Bell Syst. Tech. J.* - 1961. - vol. 40, pp. 43–63.
75. Smith J.S. *The local mean decomposition and its application to EEG perception data// J. R. Soc. Interface.* - 2005. - vol. 2. - pp. 443–454.
76. Smith S.C., Di J. *Designing asynchronous circuits using NULL convention logic (NCL).* - Morgan & Claypool Publishers, 2009. - 86 p.
77. Sparsø J., Furber S. *Principles of Asynchronous Circuit Design - A Systems Perspective.* - Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. - 360 p.
78. Stoica P., Moses R.L. *Introduction to Spectral Analysis.* - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997. - 319 p.

79. Takhar D., Laska J., Wakin M., Duarte M., Baron D., Kelly K., Baraniuk R. A *Compressed Sensing Camera: New Theory and an Implementation using Digital Micromirrors*// *Proc. Comp. Imaging IV at SPIE Electronic Imaging*. - 2006, San Jose, CA.
80. Temes G.C., Barcilon V., Marshall F.C. *The optimization of bandlimited systems*// *Proc. of the IEEE*. - 1973. - vol. 61(2). - pp. 196–234.
81. Unser M. *Sampling – 50 years after Shannon*// *Proc. of the IEEE*. - 2000. - vol. 88(4). - pp. 569–587.
82. Unser M. *Splines: A perfect fit for signal and image processing*// *IEEE Signal Processing Magazine*. - 1999. - vol. 16(6). - pp. 22–38.
83. Unser M., Aldroubi A. *A general sampling theory for non-ideal acquisition devices*// *IEEE Trans. Signal Processing*. - 1994. - vol. 42. - pp. 2915–2925.
84. Unser M., Aldroubi A., Eden M. *B-spline signal processing: Part I—Theory*// *IEEE Trans. Signal Processing*. - 1993. - vol. 41. - pp. 821–833.
85. Unser M., Zerubia J. *A generalized sampling without bandlimiting constraints*// *IEEE Trans. Circuits Syst.* - 1998. - vol. 45. - pp. 959–969.
86. Ur H., Gross D. *Improved resolution from subpixel shifted pictures*// *Comput. Vision, Graph., Image Process.* - 1991. - vol. 54(2). - pp. 181–186.
87. Van Berkel C.H., Josephs M.B., Nowick S.M. *Scanning the technology: Applications of asynchronous circuits*// *Proc. IEEE*. - 1999. - vol. 87(2). - pp. 223–233.
88. Vetterli M., Marziliano P., Blu T. *Sampling signals with finite rate of innovation*// *IEEE Trans. Sign. Proc.* - 2002. - vol. 50. - pp. 1417–1428.
89. Wang Y., He Z., Zi Y. *A comparative study on the local mean decomposition and empirical mode decomposition and their applications to rotating machinery health diagnosis*// *J. Vib. Acoust.* - 2010. - vol. 132. - pp. 10.
90. Watkins D.S. *Fundamentals of matrix computations (2nd edition)*. - Wiley, 2002. - 640 p.
91. Whittaker J. M. *The Fourier theory of the cardinal functions*// *Proc. Math. Soc. Edinburgh*. - 1929. - vol. 1. - pp. 169–176.
92. Xiao H., Roklin V., Yarvin N. *Prolate spheroidal wave functions, quadrature and interpolation*// *Inverse Problems*. - 2001. - vol. 17(4). - pp. 805–838.
93. Zhidong Z., Yang W. *A New Method for Processing End Effect In Empirical Mode Decomposition*// *Proc. ICCAS 2007*. - 2007. - pp. 841–845.
94. *DASP-Lab System: The Demonstrator of the DASP Technology / Internets*. - <http://www.edi.lv/media/uploads/UserFiles/dasp-web/dasp-labsystem/dasplabsystem.html>

## Ar promocijas darbu saistītās autora publikācijas

- I Greitans M., Shavelis R. *Extended fourier series for time-varying filtering and reconstruction from level-crossing samples// Proc. EUSIPCO 2013. - 2013, Marrakech, Marocco. - pieņemts publicēšanai.*
- II Shavelis R., Greitans M. *Signal Sampling According to Time-Varying Bandwidth// Proc. EUSIPCO 2012. - 2012, Bucharest, Romania. - pp. 1164–1168.*
- III Ozols K., Greitans M., Shavelis R. *EEG Data Acquisition System Based on Asynchronous Sigma-Delta Modulator// Proc. BEC 2012. - 2012, Tallinn, Estonia. - pp. 183–186.*
- IV Greitans M., Shavelis R., Fesquet L., Beyrouthy T. *Combined peak and level-crossing sampling scheme// Proc. SampTA 2011. - 2011, Singapore. - published on CD.*
- V Beyrouthy T., Fesquet L., Greitans M., Shavelis R., Roland R. *An asynchronous FIR filter architecture coupled to a level-crossing ADC// Proc. SampTA 2011. - 2011, Singapore. - published on CD.*
- VI Greitans M., Shavelis R. *Reconstruction of sequences of arbitrary-shaped pulses from its low-pass or band-pass approximations using spectrum extrapolation// Proc. EUSIPCO 2010. - 2010, Aalborg, Denmark. - pp. 1607–1611.*
- VII Greitans M., Shavelis R. *Signal-Dependent Sampling and Reconstruction Method of Signals With Time-Varying Bandwidth// Proc. SampTA 2009. - 2009, Marseille, France. - published on CD.*
- VIII Homjakovs I., Greitans M., Shavelis R. *Real Time Acquisition of Wideband Signals Data Using Non-Uniform Sampling// Proc. EUROCON 2009. - 2009, Saint-Petersburg, Russia. - pp. 1158–1163.*
- IX Greitans M., Shavelis R. *Signal-Dependent Techniques for Non-Stationary Signal Sampling and Reconstruction// Proc. EUSIPCO 2009. - 2009, Glasgow, Scotland. - pp. 2613–2617.*
- X Greitans M., Shavelis R. *Signal-Dependent Analysis of Signals Sampled By Send-on-Delta Sampling Scheme// Proc. SIGMAP 2008. - 2008, Porto, Portugal. - pp. 125–130.*
- XI Greitans M., Shavelis R. *Speech sampling by level-crossing and its reconstruction using spline-based filtering// Proc. IWSSIP 2007. - 2007, Maribor, Slovenia. - 292–295.*
- XII Greitans M., Shavelis R. *Spline-based signal reconstruction algorithm from multiple level crossing samples// Proc. SampTA 2007. - 2007, Thessaloniki, Greece. - pp. 60–66.*
- XIII Shavelis R. *Sampling and Waveform Reconstruction of Signals on The Basis of Minimax*

*Approach// Proc. WDASP 2007. - 2007, London, UK. - pp. 57–61.*

*XIV Shavelis R. Signal Reconstruction from Multiple Level Crossings Using Asymmetric*

*Constructing Functions// Electronics and Electrical Engineering. - 2007. - vol. 77(5). - pp. 57–60.*

## **PIELIKUMI**

## Minimizācijas uzdevuma atrisinājums

Apzīmējot  $\varphi_n(t) = \text{sinc}(\pi t - \pi n)$ , kļūdas signāla

$$\varepsilon(t) = s(t) - \tilde{s}(t) = s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(n) \varphi_n(t)$$

enerģija

$$E_\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(n) \varphi_n(t) \right)^2 dt \quad (\text{P1.1})$$

ir atkarīga no nolašu  $\tilde{s}(n)$  vērtībām. Enerģijas minimumu meklē, risinot vienādojumu sistēmu

$$\left\{ \frac{\partial E_\varepsilon}{\partial \tilde{s}(k)} = 0 \right\}, k \in Z.$$

Veicot (P1.1) parciālo atvasināšanu, iegūst

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_k(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(n) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt \right\}, k \in Z. \quad (\text{P1.2})$$

Nemot vērā, ka  $\varphi_n(t) = \text{sinc}(\pi t - \pi n)$ , integrāli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi(t-n)) \text{sinc}(\pi(t-k)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi t) \text{sinc}(\pi(k-n-t)) dt \quad (\text{P1.3})$$

atrod, izmantojot Furjē transformāciju īpašību: divu signālu kompozīcijas spektrālais blīvums vienāds šo signālu spektrālo blīvumu reizinājumam. Tātad, ja signāliem  $s_1(t)$  un  $s_2(t)$

atbilstošie spektrālie blīvumi ir  $S_1(f)$  un  $S_2(f)$ , tad signāla  $s_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau$

spektrālais blīvums būs  $S_3(f) = S_1(f) S_2(f)$ . Šajā gadījumā  $s_1(t) = s_2(t) = \text{sinc}(\pi t)$  un spektrālie blīvumi

$$S_1(f) = S_2(f) = \begin{cases} 1, & \text{ja } |f| \leq 1/2 \\ 0, & \text{citur,} \end{cases}$$

ko viegli pierādīt, izmantojot inverso Furjē transformāciju:

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{j2\pi t} (e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \text{sinc}(\pi t).$$

Tātad

$$S_3(f) = S_1(f) S_2(f) = \begin{cases} 1, & \text{ja } |f| \leq 1/2 \\ 0, & \text{citur.} \end{cases}$$

Savukārt

$$s_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \tau) \text{sinc}(\pi(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} S_3(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi f t} df = \text{sinc}(\pi t). \quad (\text{P1.4})$$

Līdz ar to no (P1.3) un (P1.4) iegūst

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(\pi \tau) \operatorname{sinc}(\pi(k-n-\tau)) d\tau = \operatorname{sinc}(\pi(k-n)) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n=k \\ 0, & \text{ja } n \neq k, \end{cases}$$

un funkcijas  $\varphi_n(t) = \operatorname{sinc}(\pi(t-n))$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , veido ortonormālu funkciju saimi. Rezultātā no (P1.2) seko:

$$\tilde{s}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \varphi_k(t) dt.$$

### Trešās kārtas B-splainu interpolācijas funkcija

B-splainu kompozīcijas izteiksme (1.27) ir ekvivalenta izteiksmei [84]

$$\beta^n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{n!} C_k^{n+1} \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)^n u\left(t - k + \frac{n+1}{2}\right),$$

kur

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ja } t \geq 0 \\ 0, & \text{ja } t < 0 \end{cases}$$

un

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Attiecīgi trešās kārtas B-splaina izteiksme

$$\beta^3(t) = \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{6} C_k^4 (t - k + 2)^n u(t - k + 2) = \frac{1}{6} \begin{cases} 4 - 6|t|^2 > 3|t|^3, & \text{ja } 1 > |t| \geq 0 \\ (2 - |t|)^3, & \text{ja } 2 > |t| \geq 1 \\ 0, & \text{ja } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Liekot  $\varphi(n) = \beta^3(n)$  izteiksmē (1.50), iegūst ciparu korekcijas filtru

$$Q_{\text{int}}(z) = \frac{1}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta^3(n) z^{-n}} = \frac{6}{z + 4 + z^{-1}} = \frac{6}{z_1 - z_2} \left( \frac{z_2}{z_2 - z} - \frac{z_1}{z_1 - z} \right), \quad (\text{P2.1})$$

kur  $z_1 = \sqrt{3} - 2$  un  $z_2 = 1/z_1$ . Pārveidojot (P2.1) iegūst

$$Q_{\text{int}}(z) = \frac{6}{z_1 - z_2} \left( \frac{z}{z - z_1} + \frac{z_2}{z_2 - z} - 1 \right) = \frac{6z_1}{z_1^2 - 1} \left( \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{1}{1 - z_1 z} - 1 \right).$$

Ņemot vērā, ka saskaitāmos iekavās var izvērst pakāpju rindās:

$$\frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k z^{-k} \quad \text{un} \quad \frac{1}{1 - z_1 z} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} z_1^k z^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} z_1^{-k} z^{-k},$$

tad

$$Q_{\text{int}}(z) = \frac{6z_1}{z_1^2 - 1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} z_1^{-k} z^{-k} \right) = \frac{6z_1}{z_1^2 - 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1^{|k|} z^{-k}.$$

Tā kā z-transformāciju secībai  $x(k)$  definē ar izteiksmi

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k},$$

tad  $Q_{\text{int}}(z)$  ir secības

$$q_{\text{int}}(k) = \frac{6z_1}{z_1^2 - 1} z_1^{|k|}$$

z-transformācija. Ievietojot šos koeficientus izteiksmē (1.52), iegūst trešās kārtas B-splaina interpolācijas funkciju

$$\varphi_{\text{int}}(t) = \frac{6z_1}{z_1^2 - 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1^{|k|} \beta^3(t-k),$$

kas 1.6. attēlā parādīta ar tumšo līniju.

### Izstieptās sferoidālās viļņu funkcijas

Signāli vienlaikus nevar būt ierobežoti laika un frekvenču apgabalos [7], tāpēc interesi rada funkcijas, kas ierobežotas vienā apgabalā, bet otrā ir maksimāli kompaktas. Uzdevums šādu funkciju atrašanai ir – no visām frekvenču joslā  $\omega \in [-\sigma, \sigma]$  ierobežotām funkcijām  $y(t)$  atrast tādu, kurai attiecība

$$\frac{\int_{-\tau}^{\tau} |y(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt} \quad (\text{P3.1})$$

ir maksimāla (izteiksmes (P3.1) skaitītājs atbilst funkcijas enerģijai laika intervālā  $t \in [-\tau, \tau]$ , bet saucējs – tās pilnajai enerģijai) [48], [74]. Risinot maksimālās attiecības uzdevumu, nonāk pie integrālvienādojuma

$$\int_{-\tau}^{\tau} y(x) \frac{\sigma}{\pi} \text{sinc}(\sigma(t-x)) dx = \lambda y(t), \quad (\text{P3.2})$$

kura kreisā puse ir konvolūcijas integrālis ar integrēšanas intervālu  $[-\tau, \tau]$ , līdz ar to (P3.2) ir ekvivalents izteiksmei

$$\left( L\left(\frac{t}{2\tau}\right) y(t) \right) * \left( \frac{\sigma}{\pi} \text{sinc}(\sigma t) \right) = \lambda y(t),$$

kur

$$L(t) = \begin{cases} 1, & \text{ja } |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{citur} \end{cases}$$

ir taisnstūra logs. Tas nozīmē, ka kreisā puse apzīmē signāla  $y(t)$  ierobežošanu laika intervālā  $[-\tau, \tau]$ , kam seko ierobežotā signāla filtrācija ar ideālu zemo frekvenču filtru, kura caurlaides josla ir  $[-\sigma, \sigma]$ . Savukārt no labās puses izriet, ka filtra izejas signālam jāsakrīt ar oriģinālo signālu  $y(t)$ , kas pareizināts ar konstanti  $\lambda$ , kuras vērtība, ņemot vērā, ka ideāls zemo frekvenču filtrs ieejas signālu nepastiprina, ir mazāka par 1.

Integrālvienādojuma (P3.2) atrisinājumi (īpašfunkcijas) ir izstieptas sferoidālas viļņu funkcijas (Prolate Spheroidal Wave Functions: PSWF)  $\varphi_n(a, t)$  ar tām atbilstošajām īpašvērtībām  $1 > \lambda_0(a) > \lambda_1(a) > \dots > \lambda_n(a) > \dots > 0$ , kas atkarīgas no parametra  $a = \sigma \tau$  [74]. Indeksa  $n$  vērtība sakrīt ar  $\varphi_n(a, t)$  nulles līmeņa šķērsojumu skaitu laika intervālā  $[-\tau, \tau]$ , un pie  $n=0$  funkcijai  $\varphi_0(a, t)$  attiecība (P3.1) ir maksimāla.

PSWF ir reālas funkcijas, kas ir ortonormālas bezgalīgā laika intervālā  $[-\infty, \infty]$  un

ortogonālas ierobežotā laika intervālā  $[-\tau, \tau]$ , t.i.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(a, t) \varphi_m(a, t) dt = \begin{cases} 1, & \text{ja } n=m \\ 0, & \text{ja } n \neq m \end{cases} \quad (\text{P3.3})$$

un

$$\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_n(a, t) \varphi_m(a, t) dt = \begin{cases} \lambda_n(a), & \text{ja } n=m \\ 0, & \text{ja } n \neq m. \end{cases} \quad (\text{P3.4})$$

No (P3.3) un (P3.4) izriet, ka funkciju  $\varphi_n(a, t)$  pilnā enerģija ir 1, bet laika intervālā  $[-\tau, \tau]$  šo funkciju enerģija ir  $\lambda_n(a)$ . Tas nozīmē, ka mazām  $\lambda_n(a)$  vērtībām funkciju  $\varphi_n(a, t)$  enerģija koncentrēta ārpus intervāla  $[-\tau, \tau]$ , bet lielām (tuvu vienam)  $\lambda_n(a)$  vērtībām – intervāla iekšpusē.

Tā kā  $\{\varphi_n(a, t)\}_{n=0,1,\dots}$  veido ortonormālu funkciju bāzi, tad frekvenču joslā  $[-\sigma, \sigma]$  ierobežotus signālus  $s(t)$  var izteikt ar lineāru PSWF kombināciju

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(a, t), \quad (\text{P3.5})$$

kur

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_n(a, t) dt$$

un

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Pareizinot (P3.5) abas puses ar  $\varphi_m(a, t)$  un integrējot tās robežās no  $-\tau$  līdz  $\tau$ , un ņemot vērā ortogonalitātes īpašību (P3.4), iegūst

$$c_n = \lambda_n^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} s(t) \varphi_n(a, t) dt. \quad (\text{P3.6})$$

Tātad rindas (P3.5) koeficientus  $c_n$  var atrast no signāla  $s(t)$  vērtībām ierobežotā laika intervālā  $[-\tau, \tau]$ , līdz ar to aproksimācijas izteiksme

$$s_N(t) = \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n(a, t)$$

ir derīga frekvenču joslā ierobežotu signālu ekstrapolācijai ārpus dotā intervāla. Aproksimācijas kļūda

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s(t) - s_N(t))^2 dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2$$

būs jo mazāka, jo lielāks būs  $N$ .

Izteiksmi (P3.5) ar koeficientiem (P3.6) var lietot arī frekvenču joslā neierobežotu signālu attēlošanai, tomēr šajā gadījumā attēlojums būs precīzs tikai uzdotajā laika intervālā

$[-\tau, \tau]$  [74].

PSWF aprēķinam var lietot dažādas metodes [31], [44], [74], [92], kas atšķiras pēc sarežģītības un precizitātes. Viena no pieejām ir PSWF izteikšana ar Helmholca vienādojuma pirmā veida atrisinājuma funkcijām  $R_{0n}(a, t)$  un  $S_{0n}(a, t)$ , kas iegūtas ar mainīgo atdalīšanas metodi sferoidālajā koordinātu sistēmā:

$$\varphi_n(a, t) = \frac{\sqrt{\lambda_n(a)}}{\mu_n(a)} S_{0n}(a, t/\tau),$$

kur

$$\lambda_n(a) = \frac{2a}{\pi} R_{0n}^2(a, 1)$$

un

$$\mu_n^2(a) = \int_{-1}^1 S_{0n}^2(a, t) dt.$$

Vēl viena pieeja balstās uz integrālvienādojuma (P3.2) pārveidošanu diskrētā formā, aizvietojojot  $x = lT$  un  $t = qT$ , kur  $T$  ir diskretizācijas solis. Rezultātā iegūst

$$\sum_{l=-L}^L y(lT) \frac{\sigma}{\pi} T \operatorname{sinc}(\sigma(q-l)T) = \lambda y(qT), \quad (\text{P3.7})$$

kur  $L = \lfloor \tau/T \rfloor$ . Rakstot (P3.7) matricu formā, iegūst

$$\mathbf{G} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}, \quad (\text{P3.8})$$

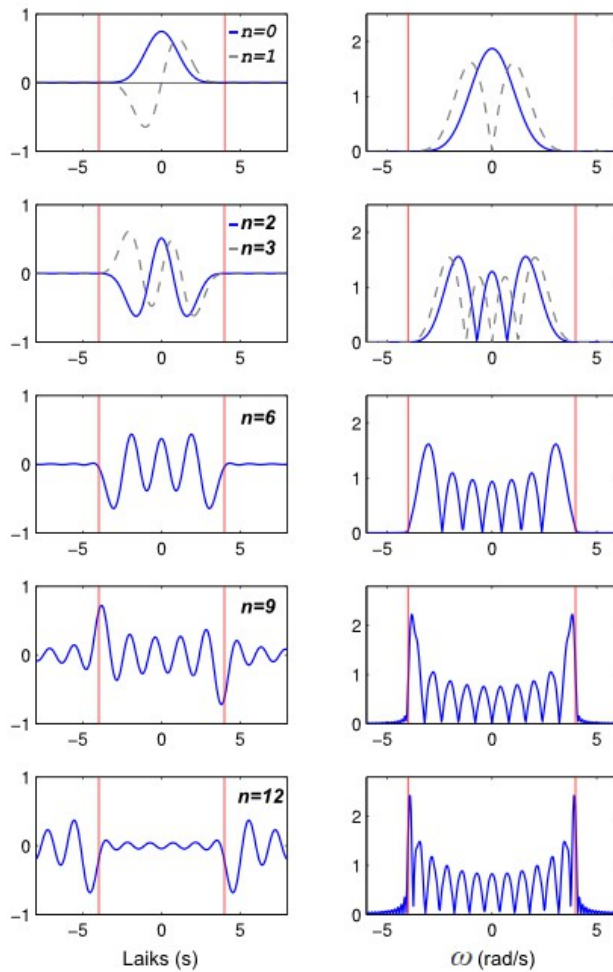
kur  $\mathbf{y}$  ir  $(2Q+1) \times 1$  kolonnas vektors ar elementiem

$$y_q = y((q-Q-1)T), \quad q = 1, 2, \dots, 2Q+1,$$

un  $\mathbf{G}$  ir  $(2Q+1) \times (2Q+1)$  kvadrātiska matrica ar elementiem

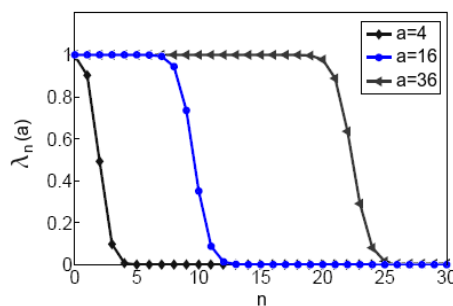
$$G_{q,l} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\pi} T \operatorname{sinc}(\sigma(q-l)T), & \text{ja } |l-1-Q| \leq L \\ 0, & \text{ja } |l-1-Q| > L. \end{cases}$$

No (P3.8) izriet, ka diskrēta laika PSWF ir matricas  $\mathbf{G}$  īpašvektori  $\mathbf{y}_n$ , kuriem atbilstošās īpašvērtības ir  $\lambda_n$ . Aprēķināto funkciju piemērs, ja  $\tau = 4$  un  $\sigma = 4$ , parādīts P3.1. attēlā.



P3.1. att. Funkciju  $\varphi_n(a, t)$  attēlojums laika (pa labi) un frekvenču (pa kreisi) apgabalos, ja parametrs  $a = \sigma \tau = 16$

No attēliem redzams, ka frekvenču apgabalā funkcijas  $\varphi_n(a, t)$  ir praktiski ierobežotas, bet laika apgabalā, pieaugot indeksa  $n$  vērtībai, funkciju enerģija intervālā  $[-\tau, \tau]$  samazinās. To parāda arī funkcijām atbilstošās īpašvērtības  $\lambda_n(a)$  P3.2. attēlā.



P3.2. att. Funkciju  $\varphi_n(a, t)$  īpašvērtības  $\lambda_n(a)$

Maksimālo indeksa vērtību, kurai īpašvērtība vēl ir tuvu vienam, nosaka parametrs  $a$  – jo lielāks  $a$ , jo lielāka šī vērtība [74].

PSWF var izmantot signāla spektrālā sastāva noteikšanai ar augstu izšķirtspēju. Tā kā

analizēts tiek galīga garuma signāla fragments laika intervālā  $[-\tau, \tau]$ , tad optimālajai loga funkcijai  $h(t)$  jābūt ar ierobežotu garumu  $2\tau$  un maksimāli kompaktai uzdotajā frekvenču joslā  $[-\sigma, \sigma]$ , t.i., attiecībai

$$\frac{\int_{-\sigma}^{\sigma} |H(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

jābūt maksimālai. Rezultātā labākā izvēle ir  $h(t) = \varphi_0(a, t)$  [48], kas dod augstāku izšķirtspēju frekvenču apgabalā salīdzinājumā ar taisnstūra, Haminga, Kaizera un citām funkcijām [53].

## Paplašinātās trigonometrisko funkciju Furjē rindas koeficientu izvedums

Trigonometriskās EFS rindas

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right)$$

koeficientus  $a_n$  un  $b_n$  atrod, minimizējot enerģiju

$$E = \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \left( s(t) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right)^2 dt, \quad (\text{P4.1})$$

un ievērojot izteiksmes

$$\int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt = \left[ u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = \frac{1}{g(t)} dt \right] = \int_0^{\Phi(\Theta)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) du = 0,$$

$$\int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt = \left[ u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = \frac{1}{g(t)} dt \right] = \int_0^{\Phi(\Theta)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) du = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt &= \left[ u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = \frac{1}{g(t)} dt \right] = \\ &= \int_0^{\Phi(\Theta)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) du = \begin{cases} \Phi(\Theta)/2, & \text{ja } n=k \\ 0, & \text{ja } n \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt &= \left[ u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = \frac{1}{g(t)} dt \right] = \\ &= \int_0^{\Phi(\Theta)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) du = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt &= \left[ u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = \frac{1}{g(t)} dt \right] = \\ &= \int_0^{\Phi(\Theta)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) \sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u\right) du = \begin{cases} \Phi(\Theta)/2, & \text{ja } n=k \\ 0, & \text{ja } n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Veicot (P4.1) parciālo atvasināšanu pēc  $a_0$  un pielīdzinot to nullei, iegūst

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= \int_0^{\Theta} \frac{2}{g(t)} \left( s(t) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right) \left( -\frac{1}{2} \right) dt = \\ &= -\int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} dt + \frac{1}{2}a_0 \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} dt = -\int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} dt + \frac{1}{2}a_0 \Phi(\Theta) = 0, \end{aligned}$$

no kurienes seko

$$a_0 = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} dt.$$

Veicot (P4.1) parciālo atvasināšanu pēc  $a_k$ , kur  $k=1, 2, \dots$ , un pielīdzinot to nullei, iegūst

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = \int_0^{\Theta} \frac{2}{g(t)} \left( s(t) - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right) \cdot \left( -\cos\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right) dt = -2 \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \cos\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt + a_k \Phi(\Theta) = 0,$$

no kurienes seko

$$a_k = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \cos\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt.$$

Veicot (P4.1) parciālo atvasināšanu pēc  $b_k$  un pielīdzinot to nullei, iegūst

$$\frac{\partial E}{\partial b_k} = \int_0^{\Theta} \frac{2}{g(t)} \left( s(t) - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right) \cdot \left( -\sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right) dt = -2 \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt + b_k \Phi(\Theta) = 0,$$

no kurienes seko

$$b_k = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \sin\left(k \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt.$$

Nemot vērā koeficientu  $a_n$  un  $b_n$  izteiksmes, var atrast svērtā signāla  $s(t)/\sqrt{g(t)}$  enerģiju

$$\int_0^{\Theta} \frac{s^2(t)}{g(t)} dt = \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \left( \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right)^2 dt = \Phi(\Theta) \left( \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right),$$

no kuras izriet Parsevala vienādība

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s^2(t)}{g(t)} dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Ja signālu  $s(t)$  aproksimē ar galīga garuma  $n \leq N$  EFS rindu, tad aproksimācijas kļūdas signāla enerģija ir

$$E(N) = \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \left( s(t) - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) \right)^2 dt = \int_0^{\Theta} \frac{s^2(t)}{g(t)} dt - \Phi(\Theta) \left( \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{2} \Phi(\Theta) \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \geq 0,$$

no kuras izriet Beseļa nevienādība

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s^2(t)}{g(t)} dt \geq \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2.$$

## Paplašinātās komplekso eksponentfunkciju Furjē rindas koeficientu izvedums

Komplekso eksponentfunkciju EFS rindas

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)}$$

koeficientus  $c_n$  atrod, minimizējot enerģiju

$$E = \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \left| s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \right|^2 dt, \quad (\text{P5.1})$$

un ievērojot svērto ortogonalitāti

$$\begin{aligned} \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} e^{-jk \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} dt &= \left[ u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = \frac{1}{g(t)} dt \right] = \\ &= \int_0^{\Phi(\Theta)} e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u} e^{-jk \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u} du = \begin{cases} \Phi(\Theta), & \text{ja } n=k \\ 0, & \text{ja } n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Veicot (P5.1) parciālo atvasināšanu pēc  $c_k$  un pielīdzinot to nullei, iegūst

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = \int_0^{\Theta} \frac{-2}{g(t)} \left( s(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \right) e^{-jk \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} dt = -2 \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-jk \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} dt + 2c_k \Phi(\Theta) = 0,$$

no kurienes seko

$$c_k = \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-jk \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} dt.$$

Ņemot vērā koeficientu  $c_k$  izteiksmi, atrast var svērtā signāla  $s(t)/\sqrt{g(t)}$  enerģiju

$$\int_0^{\Theta} \frac{|s(t)|^2}{g(t)} dt = \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \right|^2 dt = \Phi(\Theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

no kuras izriet Parsevala vienādība

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{|s(t)|^2}{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Ja signālu  $s(t)$  aproksimē ar galīga garuma  $|n| \leq N$  EFS rindu, tad aproksimācijas kļūdas signāla enerģija ir

$$E(N) = \int_0^{\Theta} \frac{1}{g(t)} \left| s(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \right|^2 dt = \int_0^{\Theta} \frac{|s(t)|^2}{g(t)} dt - \Phi(\Theta) \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = \Phi(\Theta) \sum_{|n| \geq N+1} |c_n|^2, \quad (\text{P5.2})$$

no kuras izriet Beseļa nevienādība

$$\frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{|s(t)|^2}{g(t)} dt \geq \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

## Lineārās interpolācijas signāla Furjē rindas koeficientu izvedums

Lineārās interpolācijas gadījumā signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  Furjē rindas koeficientus  $\gamma_m$  atrod no signāla FT spektra  $\check{S}(\omega)$  pie frekvencēm  $m2\pi/\Theta$  saskaņā ar izteiksmi

$$\gamma_m = \frac{1}{\Theta} \check{S}(m2\pi/\Theta). \quad (\text{P6.1})$$

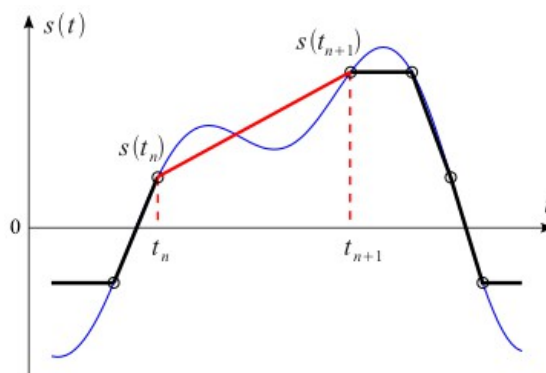
Savukārt  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  FT spektrs ir

$$\check{S}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-2} S_n(\omega), \quad (\text{P6.2})$$

kur

$$S_n(\omega) = \begin{cases} \frac{s(t_n)}{j\omega} e^{-j\omega t_n} - \frac{s(t_{n+1})}{j\omega} e^{-j\omega t_{n+1}} - \frac{s(t_{n+1}) - s(t_n)}{(t_{n+1} - t_n)\omega^2} (e^{-j\omega t_n} - e^{-j\omega t_{n+1}}), & \text{ja } |\omega| > 0 \\ \frac{s(t_{n+1}) + s(t_n)}{2} (t_{n+1} - t_n), & \text{ja } \omega = 0 \end{cases} \quad (\text{P6.3})$$

atbilst P6.1. attēlā ar sarkano krāsu izceltā signāla fragmenta spektram.



P6.1. att. Signāla  $s(t)$  (zilā līnija) LC nolašu  $s(t_n)$  lineārās interpolācijas rezultātā iegūtā signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  (melnā līnija) fragments (sarkanā līnija) starp  $t_n$  un  $t_{n+1}$

No izteiksmēm (P6.1), (P6.2) un (P6.3) izriet:

$$\gamma_m = \frac{1}{j2\pi m} \sum_{n=0}^{N-2} \left( s(t_n) e^{-jm\frac{2\pi}{\Theta} t_n} - s(t_{n+1}) e^{-jm\frac{2\pi}{\Theta} t_{n+1}} + \frac{\Theta(s(t_{n+1}) - s(t_n))}{j2\pi m(t_{n+1} - t_n)} (e^{-jm\frac{2\pi}{\Theta} t_n} - e^{-jm\frac{2\pi}{\Theta} t_{n+1}}) \right), \quad (\text{P6.4})$$

ja  $|m| > 0$ , un

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\Theta} \sum_{n=0}^{N-2} (s(t_{n+1}) + s(t_n))(t_{n+1} - t_n), \quad (\text{P6.5})$$

ja  $m = 0$ .

## Pakāpienveida interpolācijas signāla paplašinātās Furjē rindas koeficientu izvedums

Pakāpienveida interpolācijas gadījumā signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  EFS koeficientus  $c_m$  atrod no signāla EFT spektra  $\check{S}(\omega_g)$  pie frekvencēm  $m2\pi/\Phi(\Theta)$ ,  $m \in Z$ , saskaņā ar izteiksmi

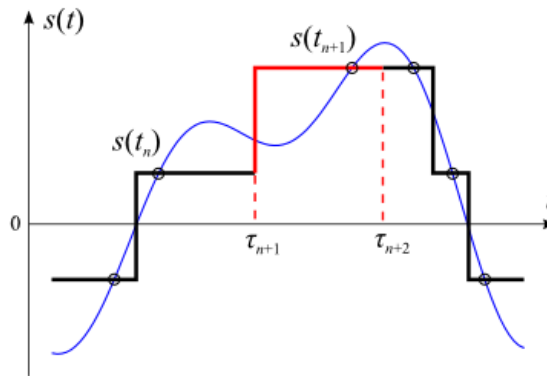
$$c_m = \frac{1}{\Phi(\Theta)} \check{S}(m2\pi/\Phi(\Theta)), \quad (\text{P7.1})$$

kur

$$\check{S}(\omega_g) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(\omega_g), \quad (\text{P7.2})$$

un  $S_n(\omega_g)$  atbilst P7.1. attēlā ar sarkano krāsu izceltā signāla fragmenta EFT spektram, ja  $\tau_0 = t_0$ ,  $\tau_n = \Phi^{-1}((\Phi(t_{n-1}) + \Phi(t_n))/2)$ ,  $n \in [1, N-1]$ , un  $\tau_N = t_{N-1}$ :

$$S_n(\omega_g) = \begin{cases} j \frac{s(t_n)}{\omega_g} (e^{-j\omega_g \Phi(\tau_{n+1})} - e^{-j\omega_g \Phi(\tau_n)}), & \text{ja } |\omega_g| > 0 \\ s(t_n)(\Phi(\tau_{n+1}) - \Phi(\tau_n)), & \text{ja } \omega_g = 0 \end{cases} \quad (\text{P7.3})$$



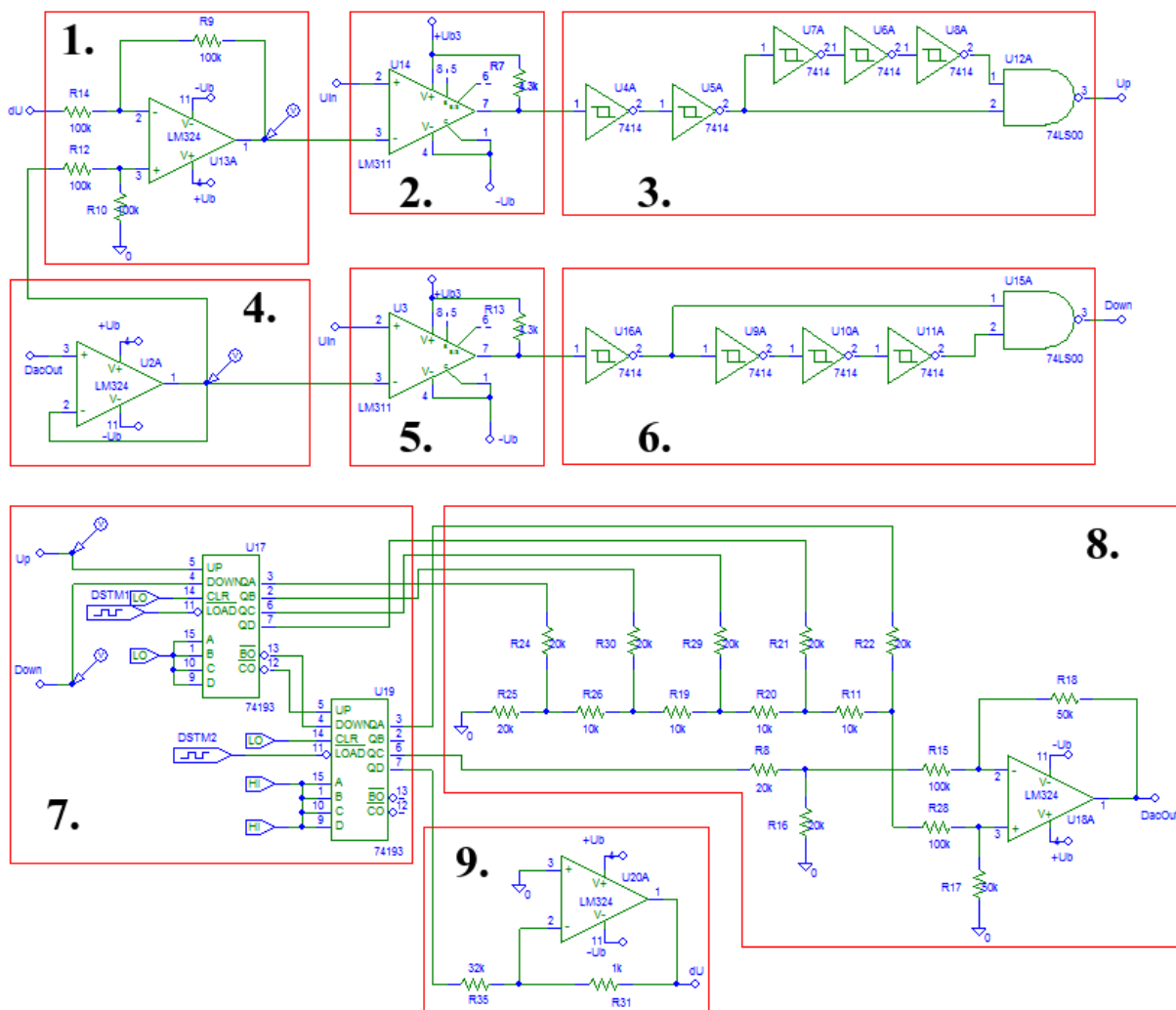
P7.1. att. Signāla  $s(t)$  (zilā līnija) LC nolašu  $s(t_n)$  pakāpienveida interpolācijas rezultātā

iegūtā signāla  $\check{s}_{s(t_n)}(t)$  (melnā līnija) fragments (sarkanā līnija) starp  $\tau_{n+1}$  un  $\tau_{n+2}$

No izteiksmēm (P7.1), (P7.2) un (P7.3) izriet:

$$c_m = \begin{cases} \frac{j}{2\pi m} \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \left( e^{-jm \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(\tau_{n+1})} - e^{-jm \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(\tau_n)} \right), & \text{ja } |m| > 0 \\ \frac{1}{\Phi(\Theta)} \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) (\Phi(\tau_{n+1}) - \Phi(\tau_n)), & \text{ja } m = 0 \end{cases} \quad (\text{P7.4})$$

## PSpice vidē modelētā delta-izmaiņu diskretizācijas elektroniskā shēma



Shēmā apvilktie bloki:

1. Operāciju pastiprinātāja slēgums, kas no 8. bloka CAP izejas (“DacOut”) atņem divkārtšu attāluma starp līmeņiem  $\Delta I$  vērtību  $2 \Delta I = -100 \text{ mV}$  (“dU”), kas šajā gadījumā ir negatīva, līdz ar to šo bloku var uzskatīt par summatoru, kas CAP izejai pieskaita  $|2 \Delta I|$  vērtību.
2. Komparatora slēgums ieejas signāla (“Uin”) salīdzināšanai ar augšējā līmeņa vērtību.
3. Loģisko elementu slēgums, kas augšējā līmeņa šķērsošanas brīdī formē īsu impulsu (“Up”) skaitītāja izejas ciparu vērtības palielināšanai par “+1”.
4. Sprieguma atkārtotājs, kas tiek pieslēgts CAP izejai.
5. Komparatora slēgums ieejas signāla (“Uin”) salīdzināšanai ar apakšējā līmeņa vērtību, kas

sakrīt ar CAP izejas signālu.

6. Loģisko elementu slēgums, kas apakšējā līmeņa šķērsošanas brīdī formē īsu impulsu (“Down”) skaitītāja izejas ciparu vērtības samazināšanai par “-1”.
7. Piecu bitu “Up/Down” skaitītājs, kura sākotnējo izejas ciparu kombināciju uzstāda: “10000”, kas CAP izejā dod nullei tuvu sākotnējo vērtību. Skaitītāju šajā gadījumā saslēdz no diviem četru bitu “Up/Down” skaitītājiem.
8. Ar rezistoru slēgumu realizēts CAP, kura ieejas bitu kombinācijas maiņai par “+1” vai “-1” atbilst izejas sprieguma maiņa par  $|\Delta I|=50$  mV vai  $-|\Delta I|=-50$  mV.
9. Invertējošais pastiprinātājs divkāršā attāluma  $2 \Delta I=-100$  mV sprieguma iegūšanai.