

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Rolands ŠĀVELIS

**SIGNĀLU DISKRETIZĀCIJAS UN ATJAUNOŠANAS PAŅĒMIENU
IZPĒTE**

Promocijas darba kopsavilkums

Promocijas darbs izstrādāts Elektronikas un datorzinātņu institūtā

Rīga 2013

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
Elektronikas un telekomunikāciju fakultāte
Radioelektronikas institūts

Rolands ŠĀVELIS

Doktora studiju programmas “Radioelektronika” doktorants

**SIGNĀLU DISKRETIZĀCIJAS UN ATJAUNOŠANAS PAŅĒMIENU
IZPĒTE**

Promocijas darba kopsavilkums

Promocijas darbs izstrādāts Elektronikas un datorzinātņu institūtā

Zinātniskais vadītājs
Dr. sc. comp., vad. pētnieks
M.GREITĀNS

Rīga 2013

UDK 621.391 (043.2)
Šā 920 s

Šāvelis R. Signālu diskretizācijas un atjaunošanas paņēmieni izpēte. Promocijas darba kopsavilkums.-R.:RTU, 2013.-37 lpp.

Iespiests saskaņā ar RTU promocijas padomes P-08 2013.gada 27.jūnija lēmumu, protokols Nr.16.



Šis darbs izstrādāts ar Eiropas Sociālā fonda atbalstu projektā “Atbalsts RTU doktora studiju īstenošanai – 2”, kā arī Valsts pētījumu programmas “Informācijas tehnoloģiju zinātniskā bāze” projekta Nr.3 “Oriģinālu signālu apstrādes paņēmieni izveide un izpēte konkurētspējīgu IT tehnoloģiju radīšanai” un ESF projekta Nr.2009/0219/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/020 “Viedo sensoru un tīklotu iegulto sistēmu pētījumu un attīstības centrs (VieSenTIS)” ietvaros Elektronikas un datorzinātņu institūtā.

ISBN ...

**PROMOCIJAS DARBS
IZVIRZĪTS INŽENIERZINĀTŅU DOKTORA GRĀDA IEGŪŠANAI
RĪGAS TEHNISKAJĀ UNIVERSITĀTĒ**

Promocijas darbs inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai tiek publiski aizstāvēts 2013.g. 31. oktobrī plkst. 17:45 Elektronikas un datorzinātņu institūtā, Dzērbenes ielā 14, 101B auditorijā.

OFICIĀLIE RECENZENTI

Profesors, Dr.sc.ing. Pēteris Misāns
Elektronikas un telekomunikāciju fakultāte, Rīgas Tehniskā universitāte

Dr.phys. Jānis Trokšs
Informācijas tehnoloģiju fakultāte, Ventspils augstskola

Dr.math. Māris Alberts
Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūts

APSTIPRINĀJUMS

Apstiprinu, ka esmu izstrādājis doto promocijas darbu, kas iesniegts izskatīšanai Rīgas Tehniskajā universitātē inženierzinātņu doktora grāda iegūšanai. Promocijas darbs nav iesniegts nevienā citā universitātē zinātniskā grāda iegūšanai.

Rolands Šāvelis (Paraksts)

Datums:

Promocijas darbs ir uzrakstīts latviešu valodā, satur ievadu, 5 nodaļas, secinājumus, literatūras sarakstu, 8 pielikumus, 61 zīmējumu un ilustrācijas, kopā 132 lappuses. Literatūras sarakstā ir 108 nosaukumi.

SATURS

Saīsinājumi.....	6
Apzīmējumi.....	7
Tēmas aktualitāte.....	9
Darba mērķis.....	10
Pētījumu metodika.....	10
Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti.....	11
Aizstāvamās tēzes.....	11
Darba praktiskais pielietojums.....	12
Darba aprobācija.....	12
Darba struktūra un apjoms.....	14
1.KLASISKĀ SIGNĀLU DISKRETIZĀCIJA UN ATJAUNOŠANA.....	15
1.1.Frekvenču joslā neierobežotu signālu diskretizācija.....	15
1.2.Šenona modeļa paplašinājums.....	16
1.3.Nolašu teorēmas variācijas un paplašinājumi.....	16
2.KLASISKĀS SIGNĀLAPSTRĀDES UZLABOJUMI.....	17
3.SIGNĀLATKARĪGA NOLAŠU IEGUVE UN APSTRĀDE.....	18
3.1.Paplašinātā Furjē rinda.....	19
3.2.Paplašinātā Furjē transformācija.....	21
3.3.Paplašinātā nolašu teorēma.....	21
3.4.Transformēta laika signāli.....	23
3.5.No laikā mainīga spektrālā sastāva atkarīga signālu diskretizācija.....	24
3.5.1.Signāla maksimālās momentānās frekvences noteikšana.....	26
3.5.2.Diskretizācijas un atjaunošanas piemēri.....	26
4.LĪMEŅU-ŠĶĒRSOJUMU DISKRETIZĀCIJA.....	29
5.LC DISKRETIZĀCIJAS PRAKTISKĀ REALIZĀCIJA.....	32
Nobeigums.....	34
Literatūra.....	36

Saīsinājumi

Saīsinājums	Nosaukums angļu valodā	Nosaukums latviešu valodā
ACP	Analog-to-digital converter	Analogciparu pārveidotājs
AACP	Asynchronous analog-to-digital converter	Asinhrons analogciparu pārveidotājs
CAP	Digital-to-analog converter	Ciparanalogu pārveidotājs
CS	Compressive sensing	Kompresīvā detektēšana
DASP	Digital alias-free signal processing	Ciparu signālu apstrāde bez frekvenču uzklāšanās kropļojumiem
DFT	Discrete Fourier transform	Diskrētā Furjē transformācija
EFS	Extended Fourier series	Paplašinātā Furjē rinda
EFT	Extended Fourier transform	Paplašinātā Furjē transformācija
EMD	Empirical Mode Decomposition	Empīriskā dekompozīcija
FROI	Finite rate of innovation	Galīgs inovāciju skaits
FS	Fourier series	Furjē rinda
IEFT	Inverse extended Fourier transform	Inversā paplašinātā Furjē transformācija
LC	Level-crossing	Līmeņu šķērsošana
STFT	Short-time Fourier transform	Īsintervāla Furjē transformācija

Apzīmējumi

Apzīmējums	Paskaidrojums
f	Frekvence
f_d	Diskretizācijas frekvence
$f_{max}(t)$	Maksimālā momentānā frekvence
F_{max}	Maksimālā frekvence
$F[s(t)]$	Furjē transformācija
$F^{-1}[S(\omega)]$	Inversā Furjē transformācija
$\tilde{F}[s(t), g(t)]$	Paplašinātā Furjē transformācija
$\tilde{F}^{-1}[S(\omega_g), g(t)]$	Inversā paplašinātā Furjē transformācija
$h(t)$	Impulsa reakcija
L_2	Hilberta telpa
$s(n)$	Diskrēts signāls
$s(t)$	Kontinuāls signāls
$\hat{s}(t)$	Aproksimācija
$s'(t)$	Pirmās kārtas atvasinājums
$s^{(-1)}(\cdot)$	Inversais signāls
$S(f), S(\omega)$	Ar Furjē transformāciju iegūtais spektrs
$S(\omega_g)$	Ar paplašināto Furjē transformāciju iegūtais spektrs
$S(t, f)$	Laika-frekvences sadalījums
t	Nepārtraukts laiks
t_n	Diskrēts laiks
T	Diskretizācijas solis
$V(\varphi)$	Signālu telpa
Z	Veselo skaitļu kopa
$\delta(t)$	Diraka delta funkcija
Δl	Attālums starp vienmērīgi izvietotiem secīgiem līmeņiem
Δt_n	Laika intervāls starp divām secīgām nolasēm
Δt_{max}	Lielākais laika intervāls starp secīgām nolasēm
Θ	Signāla periods/garums
τ	Laiks
Y	Paplašinātās diskretizācijas solis
$\varphi(t)$	Bāzes funkcija/impulsa reakcija

$\Phi(t)$	Momentānā fāze
ω	Cikliskā frekvence
Ω	Ar Furjē transformāciju iegūtā spektra maksimālā frekvence
Ω_g	Ar paplašināto Furjē transformāciju iegūtā spektra maksimālā frekvence
$\sup_{n \in Z}(x_n)$	Mazākais skaitlis y , kuram visiem $n \in Z$ izpildās: $x_n \leq y$

Tēmas aktualitāte

Pasaulē ciparu elektronisko sistēmu izstrāde galvenokārt balstās uz sinhrono jeb taktimpulsu tehnoloģiju, kurai pamatā ir sistēmas elementu vadība (sinhronizēšana) ar taktimpulsu ģeneratoru [25], [26]. Samazinot šādu sistēmu mikroshēmu izmērus un palielinot to ātrdarbību, galvenās problēmas rada:

- 1) signālu parazitiskās aizkaves, kuru lielums var būt atkarīgs no temperatūras un citiem ārējiem faktoriem;
- 2) liekā siltuma aizvadīšana – strādājot sinhronā režīmā, visi funkcionālie mezgli enerģiju patērē pastāvīgi, neatkarīgi no tā, vai tie konkrētā brīdī pilda vai nepilda savu uzdevumu, tāpēc taktimpulsu frekvences pieaugums veicina pastiprinātu shēmas elementu siltuma izkliedi, kas tiek aizvadīta ar samērā liela izmēra dzesēšanas iekārtām, tādējādi ierobežojot miniatūru sistēmu veidošanas iespējas.

Rezultātā sinhronitātes nodrošināšanai tiek ieviesti samērā sarežģīti risinājumi, kas palielina mikroshēmu izmērus un patērētās enerģijas daudzumu [26].

Nosaukto problēmu esamība atkārtoti ir radījusi interesi par asinhronām sistēmām, kuru vadība nenotiek ar taktimpulsu ģeneratoru, bet gan ar “notikumu” plūsmu, kas vispārīgā gadījumā var būt laikā nevienmērīga [2], [9], [10], [19], [26]. Tas salīdzinājumā ar sinhronām sistēmām dod vairākas priekšrocības [28]:

- 1) zems elektroenerģijas patēriņš, kas saistīts ar asinhrono ķēžu enerģijas patēriņu tikai noteiktos laika brīžos un noteiktās ķēdes daļās;
- 2) liela ātrdarbība, ko nosaka nevis globālā “sliktākā gadījuma” laika aizkave, bet gan atsevišķo ķēdes mezglu lokālās aizkaves;
- 3) ievērojami mazāks elektromagnētiskais starojums, kas attiecīgi samazina ķēdē ienestos trokšņus;
- 4) mazāka jutība pret barošanas sprieguma, temperatūras un izstrādes procesa parametru variācijām;
- 5) labāka modularitāte un sasaiste starp atsevišķiem ķēdes mezgliem;
- 6) sinhronitātes nodrošināšana vairs nav nepieciešama.

Neskatoties uz nosauktajām priekšrocībām, asinhrono sistēmu pielietojums praksē joprojām nav liels, kam par iemeslu ir to nesavietojamība ar klasiskajām (sinhronajām) sistēmām. Piemēram, veicot analogo signālu pārveidošanu ciparu formā, asinhrono sistēmu gadījumā tiek izmantoti asinhroni analogciparu pārveidotāji (AACP), kas ieejas analogā

signāla vērtības var fiksēt nevienmērīgi izvietotos laika momentos [15]. Šāda pieeja ļauj veidot no signāla atkarīgus AACP, kuru darbības aktivitāti (enerģijas patēriņu) nosaka pats signāls [2], [13] – jo straujāk mainās signāls, jo vairāk nolašu, un otrādi – jo lēnāk mainās signāls, jo mazāk nolašu. Rezultātā samazinās pārveidotāja enerģijas patēriņš un iegūto nolašu skaits, kas īpaši aktuāli ir bezvadu sensoru tīklos [23], bet problemātiska kļūst iegūto nolašu pēcapstrāde, ko nosaka to laikā nevienmērīgais izvietojums, līdz ar to klasiskā signālapstrāde šajā gadījumā nav pielietojama.

Viens no veidiem, kā sasaistīt asinhronās sistēmas ar sinhronām, ir veikt ciparu signālu pārrēķinu no nevienmērīgi uzdotām vērtībām uz laikā vienmērīgi izvietotām nolasēm, ko ekvivalenti var uzskatīt par signāla analogās formas atjaunošanu un sekojošu tā diskretizāciju ar klasisko ACP. Problēma šajā gadījumā ir izstrādāt nevienmērīgi diskretizētu signālu atjaunošanas paņēmienus.

Darba mērķis

Darba mērķis ir izpētīt un teorētiski pamatot, kā atkarībā no signāla laikā mainīgās aktivitātes (spektrālā sastāva) izvēlēties nolašu izvietojumu laikā, lai tās precīzi reprezentētu analogo signālu, kā arī izpētīt, vai šīs zināšanas var izmantot signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas iegūtas signālatkarīgu analogs-ciparu pārveidojumu rezultātā. Attiecīgie uzdevumi mērķa sasniegšanai ir:

- ◆ izpētīt literatūrā sastopamās signālu diskretizācijas metodes;
- ◆ izstrādāt un pārbaudīt teoriju un metodes signālu signālatkarīgai diskretizācijai un atjaunošanai.

Pētījumu metodika

Pētījumu metodika ietvēra darbā formulēto teorēmu un izstrādāto metožu analītiskus izvedumus, kas vēlāk tika eksperimentāli pārbaudīti ar metožu skaitliskām simulācijām MATLAB vidē.

Zinātniskā novitāte un galvenie rezultāti

Darba zinātniskā novitāte ir saistīta ar izstrādāto teoriju un metodēm signālu signālatkarīgai diskretizācijai un atjaunošanai. Pētījumu rezultātā autors:

- ✓ ieguvis paplašināto Furjē rindu periodisku signālu izvērsei trigonometrisku funkciju rindā ar laikā mainīgām frekvencēm;
- ✓ formulējis paplašināto nolašu teorēmu signālu diskretizācijai saskaņā ar brīvi izvēlētu monotoni augošu funkciju;
- ✓ izstrādājis signāla maksimālās momentānās frekvences noteikšanas metodes ar mērķi tās pielietot signālu signālatkarīgai diskretizācijai saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu;
- ✓ formulējis pietiekamo nosacījumu signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli;
- ✓ izstrādājis formulētajam nosacījumam atbilstošās signālu atjaunošanas metodes;
- ✓ veicis izstrādāto metožu simulācijas MATLAB vidē un sniedzis iegūto rezultātu novērtējumu un secinājumus;
- ✓ izstrādājis signālatkarīga analogs-ciparu pārveidotāja iespiedplati, kas darbojas pēc līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas principa.

Aizstāvamās tēzes

Aizstāvēšanai tiek izvirzītas sekojošas tēzes:

1. Iegūtā paplašinātā Furjē rinda, kuru veido tādu harmoniku bezgalīga summa, kuru frekvences ir kārtņas laikā mainīgas funkcijas, paplašina to periodisko funkciju kopu, kas izsakāmas ar rindas galīga skaita komponentēm.
2. Signālus ar frekvenču joslā ierobežotiem paplašinātās Furjē transformācijas spektriem pilnībā reprezentē to nolases, kuru pozīcijas uz laika ass nosaka šo spektru komponentu frekvenču funkcijas.
3. Vienlīdz precīzai analogo signālu diskrētai reprezentācijai nepieciešamais nolašu blīvums, ja ņem vērā šo signālu laikā mainīgās frekvenču īpašības, var samazināties salīdzinājumā ar vienmērīgo diskretizāciju.
4. Signālus ar frekvenču joslā ierobežotiem paplašinātās Furjē transformācijas spektriem precīzi var atjaunot no līmeņu-šķērsojumu nolasēm pat tad, ja maksimālais laika

intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli.

Darba praktiskais pielietojums

Darbā izstrādāto teoriju un metodes var pielietot signālu signālatkarīgai diskretizācijai un apstrādei ar mērķi samazināt datu ieguves iekārtu enerģijas patēriņu, kas īpaši aktuāli ir bezvadu sensoru tīklos, kā arī uzlabot signālatkarīgā veidā diskretizētu signālu atjaunošanas precizitāti.

Darba aprobācija

Promocijas darba zinātniskie rezultāti prezentēti sekojošās konferencēs un semināros:

1. *The 2013 European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2013), Marrakech, Morocco, September 9-13, 2013.
2. The 2012 European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2012), Bucharest, Romania, August 27-31, 2012.
3. The 9th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2011), Singapore, May 2-6, 2011.
4. The 2010 European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2010), Aalborg, Denmark, August 23-27, 2010.
5. The 8th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2009), Marseille, France, May 18-22, 2009.
6. International Conference on Signal Processing and Multimedia Applications (SIGMAP 2008), Porto, Portugal, July 26-29, 2008.
7. The 7th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2007), Thessaloniki, Greece, June 1-5, 2007.
8. Workshop on Digital Alias-free Signal Processing (WDASP 2007), London, UK, April 17, 2007.

* Pieņemts prezentēšanai un publicēšanai

Ar promocijas darbu saistītās autora publikācijas:

- I *Greitans M., Shavelis R. Extended fourier series for time-varying filtering and reconstruction from level-crossing samples// Proc. EUSIPCO 2013. - 2013, Marrakech, Marocco.
- II Shavelis R., Greitans M. Signal Sampling According to Time-Varying Bandwidth// Proc. EUSIPCO 2012. - 2012, Bucharest, Romania. - pp. 1164–1168.
- III Ozols K., Greitans M., Shavelis R. EEG Data Acquisition System Based on Asynchronous Sigma-Delta Modulator// Proc. BEC 2012. - 2012, Tallinn, Estonia. - pp. 183–186.
- IV Greitans M., Shavelis R., Fesquet L., Beyrouthy T. Combined peak and level-crossing sampling scheme// Proc. SampTA 2011. - 2011, Singapore. - published on CD.
- V Beyrouthy T., Fesquet L., Greitans M., Shavelis R., Roland R. An asynchronous FIR filter architecture coupled to a level-crossing ADC// Proc. SampTA 2011. - 2011, Singapore. - published on CD.
- VI Greitans M., Shavelis R. Reconstruction of sequences of arbitrary-shaped pulses from its low-pass or band-pass approximations using spectrum extrapolation// Proc. EUSIPCO 2010. - 2010, Aalborg, Denmark. - pp. 1607–1611.
- VII Greitans M., Shavelis R. Signal-Dependent Sampling and Reconstruction Method of Signals With Time-Varying Bandwidth// Proc. SampTA 2009. - 2009, Marseille, France. - published on CD.
- VIII Homjakovs I., Greitans M., Shavelis R. Real Time Acquisition of Wideband Signals Data Using Non-Uniform Sampling// Proc. EUROCON 2009. - 2009, Saint-Petersburg, Russia. - pp. 1158–1163.
- IX Greitans M., Shavelis R. Signal-Dependent Techniques for Non-Stationary Signal Sampling and Reconstruction// Proc. EUSIPCO 2009. - 2009, Glasgow, Scotland. - pp. 2613–2617.
- X Greitans M., Shavelis R. Signal-Dependent Analysis of Signals Sampled By Send-on-Delta Sampling Scheme// Proc. SIGMAP 2008. - 2008, Porto, Portugal. - pp. 125–130.
- XI Greitans M., Shavelis R. Speech sampling by level-crossing and its reconstruction using spline-based filtering// Proc. IWSSIP 2007. - 2007, Maribor, Slovenia. - 292–295.
- XII Greitans M., Shavelis R. Spline-based signal reconstruction algorithm from multiple level crossing samples// Proc. SampTA 2007. - 2007, Thessaloniki, Greece. - pp. 60–66.
- XIII Shavelis R. Sampling and Waveform Reconstruction of Signals on The Basis of Minimax Approach// Proc. WDASP 2007. - 2007, London, UK. - pp. 57–61.

XIV Shavelis R. Signal Reconstruction from Multiple Level Crossings Using Asymmetric Constructing Functions// Electronics and Electrical Engineering. - 2007. - vol. 77(5). - pp. 57–60.

* Pieņemts publicēšanai

Darba struktūra un apjoms

Darbs sastāv no ievada, piecām nodaļām, nobeiguma, literatūras saraksta un pielikumiem. Darbā ir 132 lappušu teksts, 61 attēls, 2 tabulas, 8 pielikumi un 108 nosaukumu informācijas avoti.

Ievadā ir izklāstīta promocijas darba tēmas aktualitāte un darba mērķis.

Pirmajā nodaļā ir apskatīta signālu klasiskā diskretizācija, kas balstās uz Naikvista kritērija ievērošanu attiecībā uz signāla frekvenču joslu. Apskatīts ir arī ideālā diskretizācijas modeļa paplašinājums laika-invariantām telpām, kas satur daudz plašāku par frekvenču joslā ierobežotu signālu kopu, kā arī parādīti svarīgākie nolašu teorēmas vispārinājumi.

Otrajā nodaļā ir apskatīti vairāki no klasiskās apstrādes atšķirīgi signālu diskretizācijas paņēmieni, kas balstās uz Naikvista kritērija ievērošanu attiecībā uz signāla brīvības pakāpēm, ko var interpretēt kā parametru skaitu, kas raksturo doto signālu. Nodaļas beigās apskatīta arī signālu laika kodēšana, kas ir analogo signālu reprezentācija ar diskrēta laika secībām.

Trešajā nodaļā ir atspoguļoti autora pētījumi saistībā ar signālu signālatkarīgu apstrādi. Atbilstoši darba mērķim ir izstrādāts teorētisks pamatojums pieņēmumam, ka signālus ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu precīzi var reprezentēt ar nolasēm, kuru izvietojumu laikā nosaka signāla aktivitāte – jo straujāk mainās signāls (jo lielāka lokālā frekvence), jo biežāk tiek ņemtas nolases, un otrādi – jo lēnāk mainās signāls (jo mazāka lokālā frekvence), jo lielāki ir laika intervāli starp secīgām nolasēm.

Ceturtajā nodaļā seko izstrādātās teorijas pielietojums signālu atjaunošanai no līmeņu-šķērsojumu nolasēm. Formulēts arī pietiekamais nosacījums signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, saskaņā ar kuru atjaunošana ir iespējama pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli.

Piektajā nodaļā ir aprakstīta līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas praktiskā realizācija.

Nobeigumā ir apkopoti promocijas darba galvenie rezultāti un secinājumi. Pielikumos ir pievienoti ar darba izklāstu saistītie matemātiskie izvedumi un līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas modelētā elektroniskā shēma.

1. KLASISKĀ SIGNĀLU DISKRETIZĀCIJA UN ATJAUNOŠANA

Pirmajā nodaļā ir apskatīta signālu klasiskā diskretizācija, kurai par pamatu ir Šenona nolašu teorēma [24], pie kuras ir nonākuši arī citi zinātnieki [11], [30].

Teorēmas formulējums: frekvenču joslā līdz F_{max} ierobežots signāls $s(t)$ ir pilnībā determinēts, ja uzdotas tā vērtības vienmērīgi izvietotos laika momentos ar soli $T=1/(2F_{max})$. Tas nozīmē, ka signālu pilnībā reprezentē tā nolases $s(t_n)$, kas ņemtas laika momentos $t_n=nT$, kur $n \in \mathbb{Z}$.

Teorēmu papildina signāla atjaunošanas formula

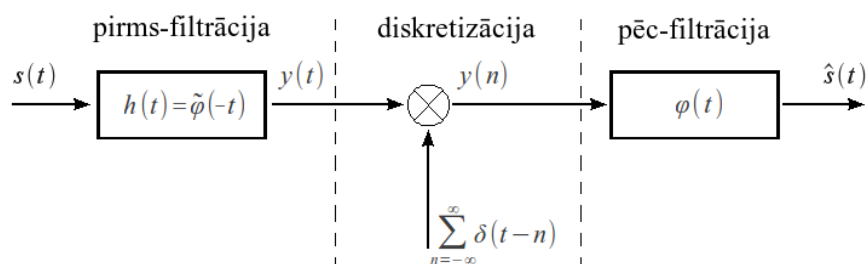
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \text{sinc}(\pi t/T - n\pi), \quad (1.1)$$

kur

$$\text{sinc}(t) = \sin(t)/t. \quad (1.2)$$

1.1. Frekvenču joslā neierobežotu signālu diskretizācija

Šenona nolašu teorēma ir pielietojama frekvenču joslā ierobežotiem signāliem. Ja josla ir neierobežota, tad signālu pirms diskretizācijas filtrē ar zemo frekvenču filtru, lai novērstu frekvenču uzklāšanos. Klasisks šāds trīs soļu diskretizācijas un atjaunošanas piemērs, ja $T=1$, parādīts 1.1. attēlā [27].



1.1. att. Frekvenču joslā neierobežotu signālu diskretizācija un atjaunošana

Ietvertie soļi ir:

- 1) pirms-filtrācija – ieejas signālu $s(t)$ filtrē ar frekvenču pret-uzklāšanās filtru $h(t)$;
- 2) diskretizācija – filtra izejas signālu $y(t)$ diskretizē punktos $t_n=n$;
- 3) pēc-filtrācija – diskrēto signālu $y(n)$ filtrē ar analogo filtru $\varphi(t)$, iegūstot atjaunoto signālu

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \varphi(t-n). \quad (1.3)$$

Atbilstoši klasiskajai pieejai pirms-filtrācijas (pret-uzklāšanās) un pēc-filtrācijas (atjaunošanas) filtri abi ir ideāli zemo frekvenču filtri ar impulsa reakcijām $h(t) = \varphi(t) = \text{sinc}(\pi t)$.

1.2. Šenona modeļa paplašinājums

Tiek definēta signālu telpa

$$V(\varphi) = \left\{ s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) \varphi(t-n) \right\}, \quad (1.4)$$

kuras katru signālu $s(t) \in V(\varphi)$ raksturo koeficientu $c(n)$ secība, kas ir šī signāla diskrēta reprezentācija un var tikt izmantota tā apstrādei vai kodēšanai. Koeficienti $c(n)$ var nebūt signāla nolases, un funkcija $\varphi(t)$ var atšķirties no $\text{sinc}(\pi t)$ [27].

Kad ir definēta signālu telpa $V(\varphi)$, nākamais uzdevums ir izteiksmē (1.4) lietoto koeficientu $c(n)$ noteikšana signālu $s(t) \in L_2$ reprezentācijai telpā $V(\varphi)$, ko veic atbilstoši trīs pieejām [27]:

- 1) diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu;
- 2) saskaņotā diskretizācija;
- 3) nolašu interpolācija.

Diskretizācijas un atjaunošanas rezultātā no signāla $s(t) \in L_2$ iegūst tā aproksimāciju $\hat{s}(t) \in V(\varphi)$. Kā rāda kļūdu analīze [27], tad vismazāko aproksimācijas kļūdu dod diskretizācija ar minimālu kvadrātisko kļūdu, bet vislielāko – nolašu interpolācija, kam par iemeslu ir priekšfiltra neesamība un signālā ienestie frekvenču uzklāšanās kropļojumi, tāpēc svarīgi pirms signālu diskretizācijas ir lietot atbilstošo analogo priekš-filtru.

1.3. Nolašu teorēmas variācijas un paplašinājumi

Literatūrā ir atrodamas nolašu teorēmas dažādas variācijas un paplašinājumi [8], piemēram, Krāmera vispārinātā nolašu teorēma [12], daudzkanālu diskretizācija [21], signālu dekompozīcija ar vilnīšu (*wavelet*) funkcijām [18] un nevienmērīgā diskretizācija [7], [14], [20], kuras gadījumā attālumi $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ starp nolasēm var būt dažādi.

2. KLASISKĀS SIGNĀLAPSTRĀDES UZLABOJUMI

Otrajā nodaļā ir apskatītas vairākas signālapstrādes pieejas, kas pamatojas uz faktu, ka daudzus signālus, kas klasiski aizņem plašu frekvenču joslu un tādējādi prasa augstu diskretizācijas frekvenci, kompakti var attēlot noteiktā funkciju bāzē. Problēma šajā gadījumā ir atrast paņēmienus, kā no signāla ar mazu mērījumu skaitu iegūt visus tos parametrus, kas pilnībā raksturo šo signālu.

DASP (Digital alias-free signal processing) gadījumā [4] tiek apskatīti plaša frekvenču diapazona signāli, kuriem no nulles atšķirīgā spektra daļa izvietojas salīdzinoši mazā frekvenču joslā. Tas ļauj šos signālus apstrādāt ar samazinātu vidējo diskretizācijas frekvenci, pielietojot pseidogadījum-diskretizāciju, kas pavājināja frekvenču uzklāšanās efektu un tādējādi paplašina tālākās signālapstrādes iespējas.

Kompresīvās detektēšanas (CS: Compressive sensing) gadījumā [5] tiek apskatīti signāli, kas noteiktā funkciju bāzē ir izsakāmi ar nelielu no nulles atšķirīgu koeficientu skaitu M . Tas ļauj šos signālus precīzi reprezentēt ar signāla un gadījumvērtību matricas skalāriem reizinājumiem, kuru skaitu L nosaka no nulles atšķirīgo koeficientu skaits M .

Trešā signālapstrādes pieeja apskata signālus ar galīgu inovāciju skaitli (FROI: Finite rate of innovation), kas ļauj plaša frekvenču diapazona signālus atjaunot no mazā frekvenču joslā uzdotiem to spektru koeficientiem ar anihilējošā filtra metodi [29].

Visu trīs pieeju kopīgā pamatdoma ir – signālu pilnīgai reprezentācijai pietiek ar tik nolasēm/mērījumiem, cik liels ir signāla inovāciju skaitlis – parametru skaits, kas raksturo signālu. Atšķiras tikai nolašu/mērījumu iegūšanas veids un to tālākā apstrāde sākotnējā signāla atjaunošanai.

Kā ceturrtā ar pirmajām trīs nesaistīta pieeja tiek apskatīta signālu laika kodēšana, kas ir analogo signālu reprezentācija ar diskrēta laika secībām [15]. Laika kodēšanu parasti veic asinhrons ACP, kuram ir vairākas priekšrocības salīdzinājumā ar sinhroniem pārveidotājiem – samazināts enerģijas patēriņš un elektromagnētiskā interference, bet sarežģītāka kļūst signālu pēcapstrāde.

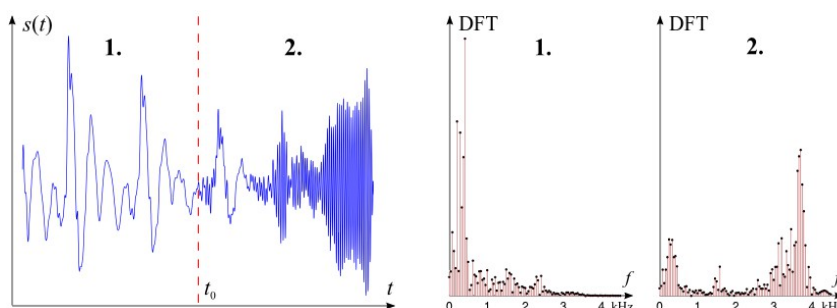
3. SIGNĀLATKARĪGA NOLAŠU IEGUVE UN APSTRĀDE

Trešajā nodaļā ir aprakstīti autora pētījumu rezultāti saistībā ar signālatkarīgu apstrādi, kas ņem vērā signālu laikā mainīgo spektrālo sastāvu. Pētījumu gaitā autors:

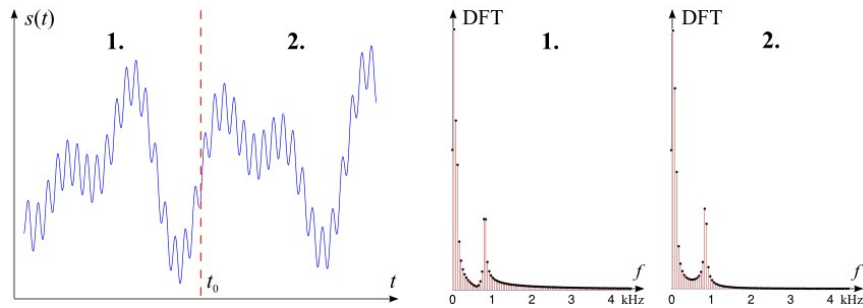
- 1) ieguvis paplašināto Furjē rindu (EFS) periodisku signālu izvērsei trigonometrisku funkciju rindā ar laikā mainīgām frekvencēm;
- 2) no EFS ieguvis darbā [17] definēto paplašināto Furjē transformāciju (EFT);
- 3) formulējis paplašināto nolašu teorēmu signāliem ar ierobežotiem EFT spektriem;
- 4) parādījis, kā no klasiskās signālapstrādes izriet paplašinātā, izmantojot transformēta laika signālu attēlu 3.5.;
- 5) parādījis blokshēmu signālu analogs-ciparu pārveidošanai, kas ņem vērā signālu laikā mainīgo spektrālo sastāvu;
- 6) definējis maksimālās momentānās frekvences izteiksmi signāliem, kas sastāv no trigonometriskām funkcijām ar laikā mainīgām frekvencēm;
- 7) piedāvājis trīs metodes (uz STFT balstīto, EMD un ekstrēmu metodi) signālu maksimālās momentānās frekvences novērtēšanai;
- 8) veicis signālatkarīgās un vienmērīgās apstrādes nolašu skaita un atjaunošanas precizitātes salīdzinājumu mākslīgi sintezētiem un reāliem signāliem ar laikā mainīgām frekvenču īpašībām.

Tālāk sniegsim nedaudz sīkāku uzskaitīto rezultātu izklāstu.

Praksē sastopamie reālās pasaules signāli bieži vien ir nestacionāri ar laikā mainīgām frekvenču īpašībām. Par nestacionāru signālu šajā gadījumā tiek saukts signāls, kura spektrālais sastāvs dažādos laika intervālos ir atšķirīgs (3.1. attēls), savukārt stacionāram signālam neatkarīgi no intervāla spektrālais sastāvs paliek nemainīgs (3.2. attēls).



3.1. att. Runas (nestacionārs) signāls un divu tā intervālu DFT koeficientu absolūtās vērtības



3.2. att. Stacionārs signāls un divu tā intervālu DFT koeficientu absolūtās vērtības

Kā redzams no 3.1. attēla, tad signāls $s(t)$ laika intervālā līdz t_0 mainās salīdzinoši lēnāk nekā otrajā intervālā pēc t_0 , līdz ar to loģisks ir jautājums, vai signāla nolases pirmajā intervālā var ņemt retāk nekā otrajā? Ja var, tad kā izvēlēties nolašu $s(t_n)$ laika pozīcijas t_n , lai signāls būtu precīzi atjaunojams? Uz šiem jautājumiem atbildēsim šajā nodaļā.

3.1. Paplašinātā Furjē rinda

Kā parādīts darbā [I], tad periodiskus signālus ar periodu Θ var izvērst paplašinātajā trigonometrisko funkciju Furjē rindā (EFS: extended Fourier series) ar laikā mainīgām frekvencēm, t.i., rindā

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right), \quad (3.1)$$

kur

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{g(\tau)} d\tau, \quad (3.2)$$

bet $g(t) > 0$ ir periodiska ar periodu Θ funkcija. Rindas koeficientus

$$a_n = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \cos\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt \quad (3.3)$$

un

$$b_n = \frac{2}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Theta} \frac{s(t)}{g(t)} \sin\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)\right) dt \quad (3.4)$$

atrod, minimizējot svērtā kļūdas signāla $(s(t) - y(t)) / \sqrt{g(t)}$ enerģiju, kur $y(t)$ sakrīt ar (3.1) labo pusi.

Bieži vien trigonometrisko funkciju vietā ērtāks ir eksponentfunkciju lietojums – periodiskus signālus ar periodu Θ var izvērst paplašinātajā kompleksu eksponentfunkciju Furjē rindā

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\theta)} \phi(t)}, \quad (3.5)$$

kur

$$c_n = \frac{1}{\Phi(\theta)} \int_0^{\theta} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-jn \frac{2\pi}{\Phi(\theta)} \phi(t)} dt. \quad (3.6)$$

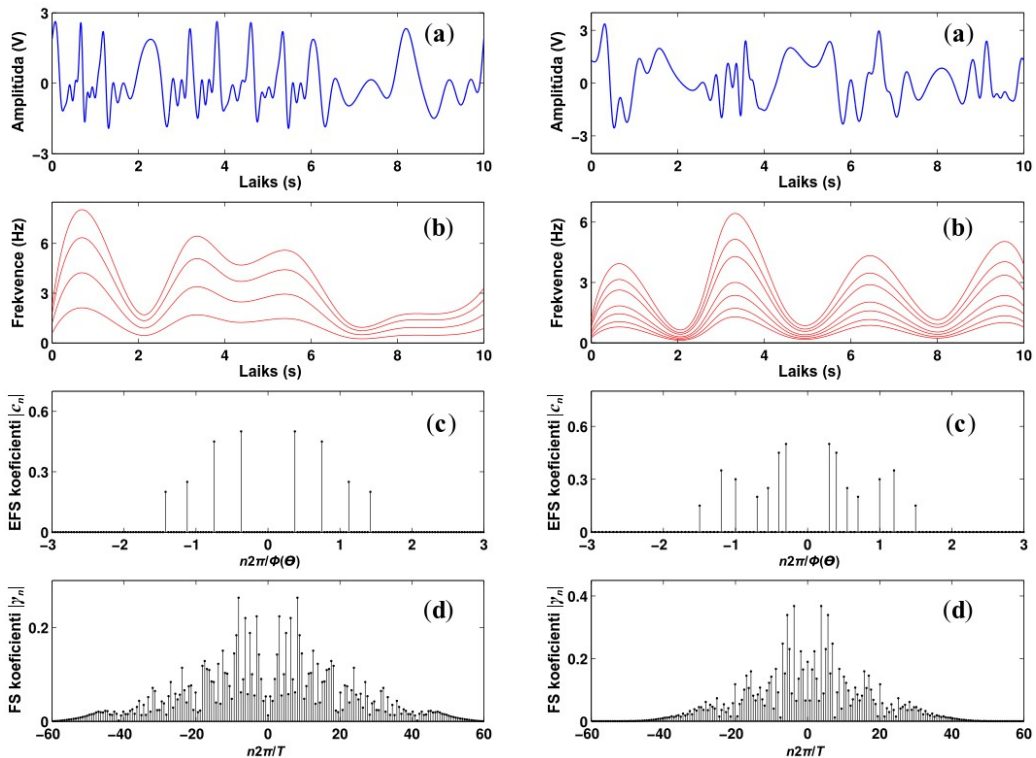
Beseļa nevienādība un Parsevala vienādība šajā gadījumā ir:

$$\frac{1}{\Phi(\theta)} \int_0^{\theta} \left| \frac{s(t)}{g(t)} \right|^2 dt \geq \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \quad (3.7)$$

un

$$\frac{1}{\Phi(\theta)} \int_0^{\theta} \left| \frac{s(t)}{g(t)} \right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (3.8)$$

EFS spektru piemēri diviem signāliem, kas sastāv no četrām (pa kreisi) un septiņām (pa labi) svārstībām ar frekvencēm $k f_1(t)$, $k=1,2,3,4$, un $m f_2(t)$, $m=1,2,\dots,7$, parādīti 3.3. attēlā. Pirmā signāla spektra aprēķinam tika lietota funkcija $g_1(t)=1/(2\pi f_1(t))$, bet otrā signāla spektram – funkcija $g_2(t)=1/(2\pi f_2(t))$. Attēlā parādīti arī abu signālu klasiskās Furjē rindas FS spektri, kas atbilst EFS speciālgadījumam, kad $g_1(t)=g_2(t)=1$.



3.3. att. EFS (c) un FS (d) amplitūdu spektri periodiskiem ar periodu $\theta=10$ sekundes signāliem (a), kas sastāv no četrām (pa kreisi) un septiņām (pa labi) trigonometriskām funkcijām ar kārtņām laikā mainīgām frekvencēm (b)

Kā izriet no 3.3. attēla, tad frekvenču joslā neierobežotus signālus ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu kompakti var reprezentēt ar EFS rindu, ja vien funkciju $g(t)$ izvēlas atbilstoši konkrētajam signālam.

3.2. Paplašinātā Furjē transformācija

Robežgadījumā, kad Θ tiecas uz bezgalību, no (3.6) iegūst:

$$S(\omega_g) = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} c_n \Phi(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt, \quad (3.9)$$

kas sakrīt ar paplašinātās Furjē transformācijas (EFT: extended Fourier transform) definīciju [17]:

$$S(\omega_g) = \tilde{F}[s(t), g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt \quad (3.10)$$

Savukārt inversās paplašinātās Furjē transformācijas (IEFT) izteiksme [17]

$$s(t) = \tilde{F}^{-1}[S(\omega_g), g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g, \quad (3.11)$$

izriet no (3.5) robežgadījumā, kad Θ tiecas uz bezgalību:

$$s(t) = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Phi(\Theta)} S\left(n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)}\right) e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g. \quad (3.12)$$

Ja $g(t)=1$, tad EFT un IEFT sakrīt ar tiešās un apgrieztās Furjē transformācijas klasiskajām izteiksmēm.

Kā piemēru EFT aprēķinam var apskatīt signālu $x(t)=\cos(\psi(t))$, kura frekvence $\psi'(t)/(2\pi) > 0$. Izvēloties funkciju $g(t)=1/\psi'(t)$, signāla EFT ir:

$$\begin{aligned} X(\omega_g) &= \tilde{F}[x(t), g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\psi(t)) \psi'(t) e^{-j\omega_g \psi(t)} dt = [u = \psi(t), du = \psi'(t) dt] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u) e^{-j\omega_g u} du = \pi \delta(\omega_g - 1) + \pi \delta(\omega_g + 1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3. Paplašinātā nolašu teorēma

Izmantojot EFT, var pierādīt paplašināto nolašu teorēmu signāliem ar ierobežotiem EFT spektriem [II].

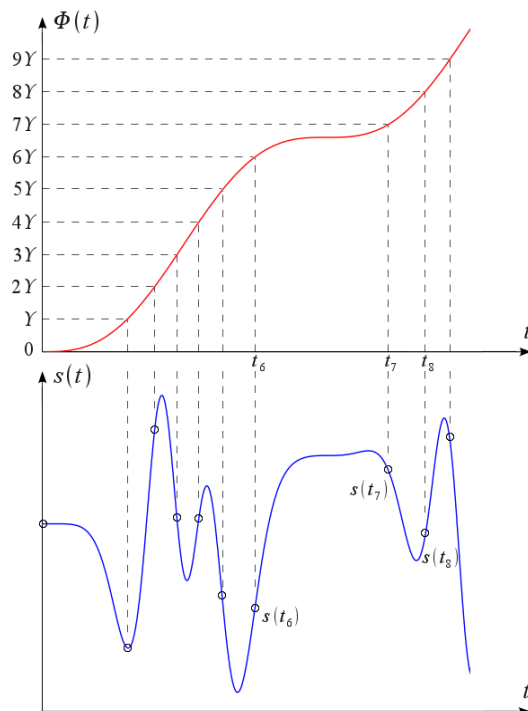
Teorēmas formulējums: jebkurš frekvenču joslā līdz Ω_g ierobežots signāls $s(t)$, kura EFT spektrs $S(\omega_g) = \tilde{F}[s(t), g(t)] = 0$, ja $|\omega_g| > \Omega_g$, ir pilnībā determinēts, ja uzdotas tā

vērtības laika momentos $t_n = \Phi^{-1}(n \gamma)$ ar soli $\gamma \leq \pi / \Omega_g$.

Signāla atjaunošanas formula:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\gamma}(\Phi(t) - \Phi(t_n))\right). \quad (3.14)$$

Signāla $s(t)$ diskretizācijas piemērs atkarībā no $\Phi(t)$ laika momentos $t_n = \Phi^{-1}(n \gamma)$ parādīts 3.4. attēlā – jo straujāk aug $\Phi(t)$, jo mazāki ir laika intervāli starp secīgām nolāsēm.



3.4. att. Signāla $s(t)$ diskretizācija atkarībā no $\Phi(t)$ – nolāšu $s(t_n)$ laika momenti t_n atbilst $\Phi(t)$ un līmeņu $n \gamma$, $n \in Z$, šķērsojumu vietām, t.i., $t_n = \Phi^{-1}(n \gamma)$

Piemērs. Ierobežota garuma $|n| \leq N$ paplašinātās Furjē rindas (3.5) signāla

$$x(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} \Phi(t)} \quad (3.15)$$

EFT spektrs, ja $g(t) = 1 / \Phi'(t)$, ir:

$$X(\omega_g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt = \sum_{n=-N}^N 2\pi c_n \delta\left(\omega_g - n \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)}\right). \quad (3.16)$$

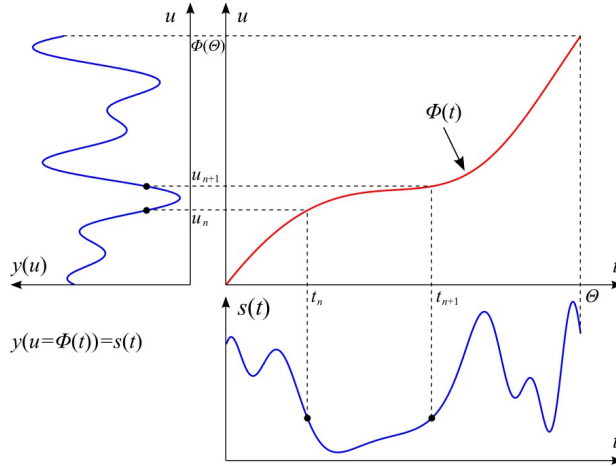
Tātad signāls ir ierobežots frekvenču joslā $\omega_g \in [-2\pi N / \Phi(\Theta), 2\pi N / \Phi(\Theta)]$, un to pilnībā reprezentē nolases $x(t_n)$ saskaņā ar izteiksmi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\gamma}(\Phi(t) - \Phi(t_n))\right), \quad (3.17)$$

kur $\gamma = \Phi(\Theta) / (2N)$ un $t_n = \Phi^{-1}(n \gamma)$.

3.4. Transformēta laika signāli

Iepriekš ar izteiksmi (3.2) definēto funkciju $\Phi(t)$ var izmantot signālu $s(t)$ transformācijai, kā tas parādīts 3.5. attēlā.



3.5. att. Signāla $s(t)$ transformēta laika $u = \Phi(t)$ signāls $y(u)$

Transformācijas rezultātā iegūst signālam $s(t)$ atbilstošo transformēta laika signālu $y(u)$, kura vērtība $y(u_n)$ pie argumenta $u_n = \Phi(t_n)$ sakrīt ar $s(t_n)$, tātad $y(\Phi(t)) = s(t)$ un $y(u) = s(\Phi^{-1}(u))$.

No 3.5. attēla var secināt:

- 1) Galīga garuma signālu $y(u)$, $u \in [0, \Phi(\Theta)]$, var izvērst klasiskajā Furjē rindā

$$y(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u}, \text{ kur } c_n = \frac{1}{\Phi(\Theta)} \int_0^{\Phi(\Theta)} y(u) e^{-jn \frac{2\pi}{\Phi(\Theta)} u} du. \quad (3.18)$$

Liekot argumenta u vietā $u = \Phi(t)$, un ievērojot, ka $y(\Phi(t)) = s(t)$ un $\Phi'(t) = 1/g(t)$, no (3.18) iegūst paplašinātās Furjē rindas izteiksmes (3.5) un (3.6).

- 2) Līdzīgā veidā no signāla $y(u)$ Furjē transformācijām $Y(\eta) = F[y(u)]$ un $y(u) = F^{-1}[Y(\eta)]$ iegūst signāla $s(t)$ EFT izteiksmes (3.10) un (3.11):

$$\begin{aligned} Y(\eta) = F[y(u)] &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j\eta u} du = \left[\begin{array}{l} u = \Phi(t), du = \Phi'(t) dt = (1/g(t)) dt \\ y(\Phi(t)) = s(t), \eta = \omega_g \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{g(t)} e^{-j\omega_g \Phi(t)} dt = \tilde{F}[s(t), g(t)] = S(\omega_g), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} y(u) = F^{-1}[Y(\eta)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\eta) e^{j\eta u} d\eta = \left[\begin{array}{l} u = \Phi(t), t = \Phi^{-1}(u) \\ \eta = \omega_g, Y(\eta) = S(\omega_g), d\eta = d\omega_g \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_g) e^{j\omega_g \Phi(t)} d\omega_g = \tilde{F}^{-1}[S(\omega_g), g(t)] = s(\Phi^{-1}(u)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

No signāla $y(u)$ FT īpašībām izriet arī $s(t)$ EFT īpašības.

- 3) Ja signāla $y(u)$ FT spektrs ir frekvenču joslā ierobežots: $Y(\eta)=0$, ja $Y(\eta)>\Omega_g$, tad šo signālu pilnībā reprezentē nolases $y(nY')$ saskaņā ar izteiksmi

$$y(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nY') \text{sinc}(\pi u / Y' - n\pi), \quad (3.21)$$

kur $Y' \leq \pi / \Omega_g$. Atkal, liekot argumenta u vietā $u = \Phi(t)$, un ievērojot vienādības $y(\Phi(t)) = s(t)$ un $\Phi'(t) = 1/g(t)$, no signāla $y(u)$ klasiskās nolašu teorēmas iegūst signāla $s(t)$ paplašināto nolašu teorēmu (3.14).

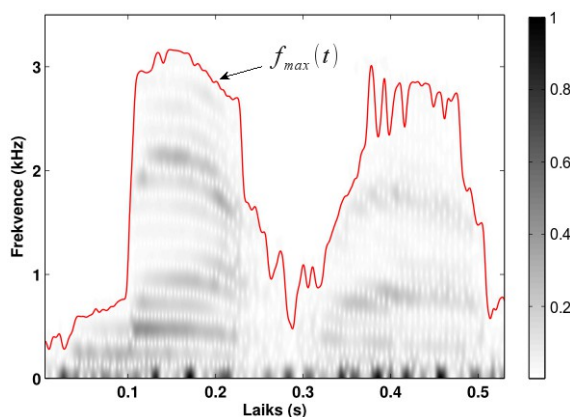
Kā izriet no dotajiem trīs piemēriem, tad uz signālu $y(u)$ attiecināmie klasiskās signālapstrādes paņēmieni ar funkcijas $\Phi(t)$ pārveidojumu pārvēršas par signāla $s(t)$ paplašināto apstrādi.

3.5. No laikā mainīga spektrālā sastāva atkarīga signālu diskretizācija

No reālās pasaules iegūtie signāli bieži vien ir nestacionāri ar laikā mainīgām frekvenču īpašībām, kuru noteikšanai izmanto dažādas laika-frekvences analīzes metodes [1]. Viena no populārākajām ir īsintervāla Furjē transformācija (STFT), kurai pamatā ir signāla $s(\tau)$ īsu fragmentu $s(\tau)u(\tau-t)$ spektru aprēķins laika momentos t saskaņā ar izteiksmi

$$S(t, f) = \int_{t-\Theta/2}^{t+\Theta/2} s(\tau)u(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (3.22)$$

kur $u(\tau)$ ir ierobežota garuma loga funkcija ar vērtībām $u(\tau)=0$, ja $|\tau|>\Theta/2$. Dažādiem t iegūtie spektri nestacionāram signālam var atšķirties, līdz ar to dažādi var būt arī šo spektru joslu platumi $f_{max}(t)$, kuriem pie izvēlētās sliekšņa $d>0$ vērtības izpildās nevienādības: $|S(t, f)| \geq d$, ja $|f| \leq f_{max}(t)$, un $|S(t, f)| < d$, ja $|f| > f_{max}(t)$.



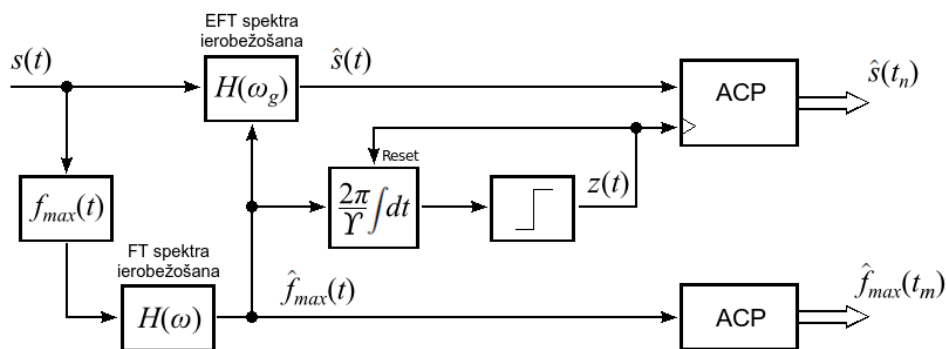
3.6. att. Runas signāla laika-frekvences sadalījums $S(t, f)$ un no tā iegūtā maksimālā momentānā frekvence $f_{max}(t)$

Funkcijas $f_{max}(t)$ piemērs, kas atbilst runas signāla laika-frekvences sadalījumam $S(t, f)$, ja $d=0.05$ parādīts 3.6. attēlā.

Lai funkciju $f_{max}(t)$, ko turpmāk saucim par signāla maksimālo momentāno frekvenci, ņemtu vērā pie signālu signālatkarīgas diskretizācijas atbilstoši pieejai – jo lielāka frekvence $f_{max}(t)$, jo mazāks diskretizācijas solis, tad saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu izmantosim ideju par signālu diskretizāciju atkarībā no funkcijas $\Phi(t)$, kuru šajā gadījumā atradīsim:

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^t f_{max}(\tau) d\tau = \int_0^t \omega_{max}(\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

bet signāla nolases ņemsim laika momentos $t_n = \Phi^{-1}(n\gamma)$ ar soli γ , ko noteiks signāla EFT spektra joslas platums pie funkcijas $g(t) = 1/\omega_{max}(t)$. Šādas diskretizācijas blokshēma parādīta 3.7. attēlā.



3.7. att. No laikā mainīga spektrālā sastāva atkarīga signālu $s(t)$ pārveidošana ciparu formā

Attēlā bloka $f_{max}(t)$ izejas signāls ir ieejas signāla $s(t)$ maksimālā momentānā frekvence, kuru filtrē ar zemo frekvenču filtru un tālāk izmanto signāla $s(t)$ EFT spektra ierobežošanai joslā $\omega_g \in [-\Omega_g, \Omega_g]$ un laika momentu $t_n = \Phi^{-1}(n\gamma)$ iegūšanai sekojošā veidā: komparatora ieejai tiek pieslēgts integratora izejas signāls $\Phi(t)/\gamma$, kuram sasniedzot vērtību $\Phi(t_n)/\gamma = 1$, komparatora izejas signāls $z(t)$ pārslēdzas no zemā uz augsto līmeni un pēc nelielas aiztures $\tau \ll t_{n+1} - t_n$ uzstāda integratora izeju uz $\Phi(t_n + \tau)/\gamma = 0$, kam seko $z(t)$ vērtības maiņa no augstā uz zemo līmeni. Rezultātā iegūts tiek komparatora izejas signāls $z(t)$ ar pozitīvām pārslēgumu vietām laika momentos $t_n = \Phi^{-1}(n\gamma)$, kuru izmanto ACP taktēšanai signāla $\hat{s}(t)$ nolašu $\hat{s}(t_n)$ iegūšanai. Vienlaicīgi ar vienmērīgu soli diskretizēta tiek pati funkcija $\hat{f}_{max}(t)$, kas ir nepieciešama $\hat{s}(t)$ atjaunošanai saskaņā ar interpolācijas izteiksmi (3.14), līdz ar to informāciju par signālu $\hat{s}(t)$ pēc pārveidošanas satur nolašu $\hat{s}(t_n)$ un $\hat{f}_{max}(t_m)$ kvantētās vērtības.

3.5.1. Signāla maksimālās momentānās frekvences noteikšana

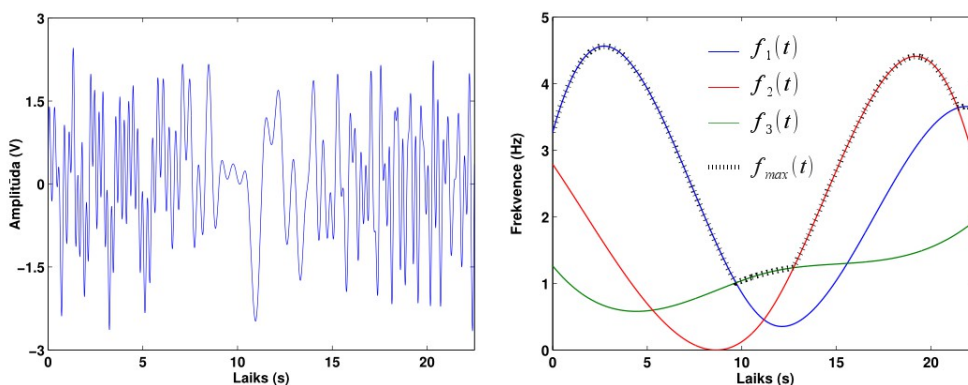
Par signāla

$$s(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(\psi_m(t)), \quad (3.24)$$

kur A_m un $f_m(t) = \psi'_m(t)/(2\pi) > 0$ ir svārstību amplitūdas un frekvences, maksimālo momentāno frekvenci sauc funkciju $f_{max}(t)$, kuras vērtība brīvi izvēlētajā laika momentā $t = \tau$ ir [II]:

$$f_{max}(\tau) = \max(f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_M(\tau)). \quad (3.25)$$

Šādas funkcijas piemērs signālam, kas sastāv no $M=3$ svārstībām, parādīts 3.8. attēlā



3.8. att. Signāls un to veidojošo triju svārstību frekvenču funkcijas $f_1(t)$, $f_2(t)$ un $f_3(t)$, un no tām iegūtā signāla maksimālā momentānā frekvence $f_{max}(t)$

No definīcijas (3.25) izriet, ka signāla $x(t) = \sum_{m=1}^M A_m \cos(k_m \psi(t))$, kur $k_1 < \dots < k_M$ ir pozitīvi koeficienti, frekvence $f_{max}(t)$ sakrīt ar augstākās svārstības $A_M \cos(k_M \psi(t))$ momentāno frekvenci, bet signāla EFT spektrs pie funkcijas $1/g(t) = k_M \psi'(t)$ ir frekvenču joslā $\omega_g \in [-1, 1]$ ierobežots:

$$X(\omega_g) = \tilde{F}[x(t), g(t)] = \sum_{m=1}^M A_m \pi (\delta(\omega_g + k_m/k_M) + \delta(\omega_g - k_m/k_M)). \quad (3.26)$$

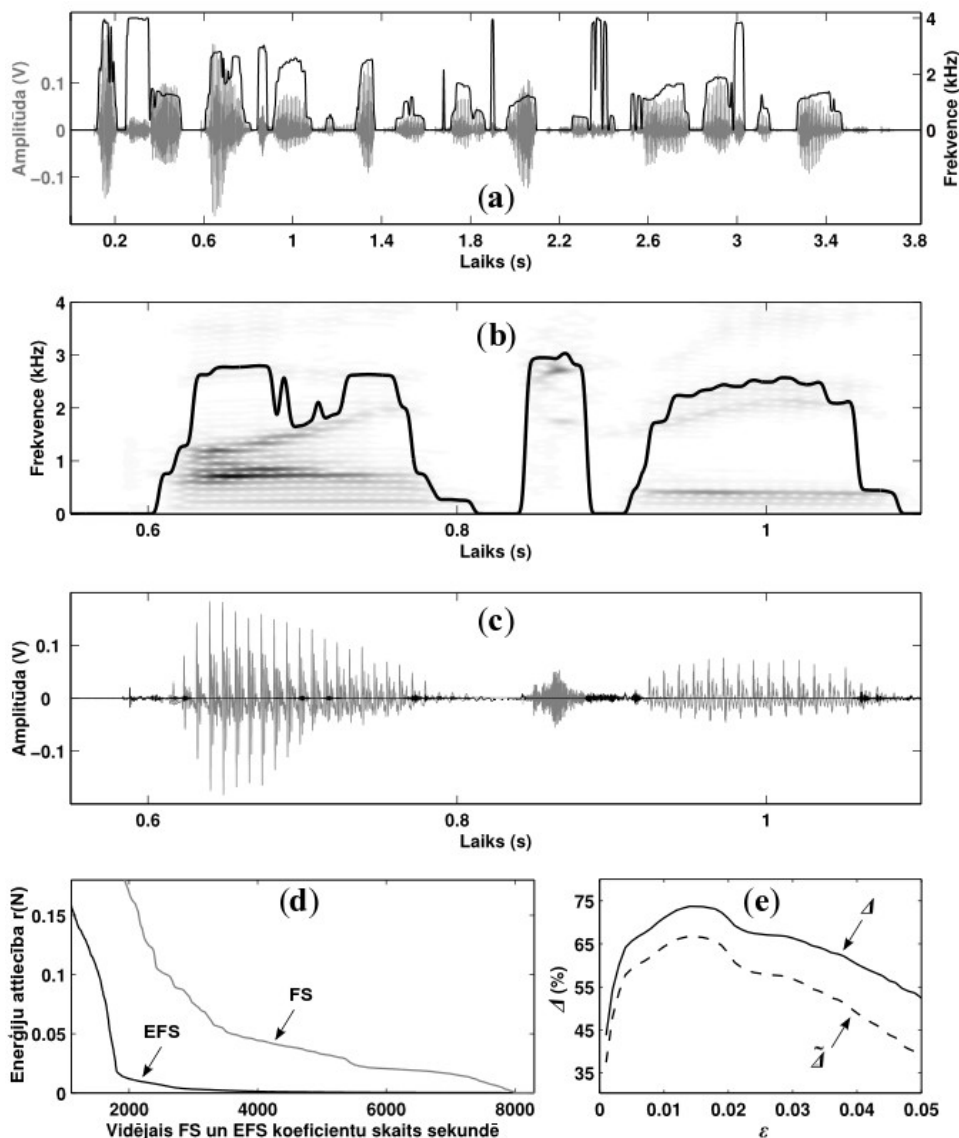
Ja signāla (3.24) frekvences $f_m(t)$ nav zināmas, vai arī tas atšķiras no (3.24), tad $f_{max}(t)$ noteikšanai izmanto darbā aprakstītās trīs metodes – uz STFT balstīto, EMD vai ekstrēmu metodi [II].

3.5.2. Diskretizācijas un atjaunošanas piemēri

Kad ir zināmi $f_{max}(t)$ novērtēšanas paņēmieni, tiek veikts signālatkarīgās un

vienmērīgās diskretizācijas nolašu skaita un atjaunošanas precizitātes salīdzinājums.

Viens no piemēriem ir no TIMIT datubāzes (/timit/train/dr1/mtpf0/sx335.wav) ņemts 3.8 sekundes garš runas signāls (3.9. attēls), kura maksimālā momentānā frekvence $\hat{f}_{max}(t)$ iegūta ar STFT metodi, ja Heminga loga garums izvēlēts 20 ms, kas aptuveni sakrīt ar signāla kvazistacionaritātes intervālu.

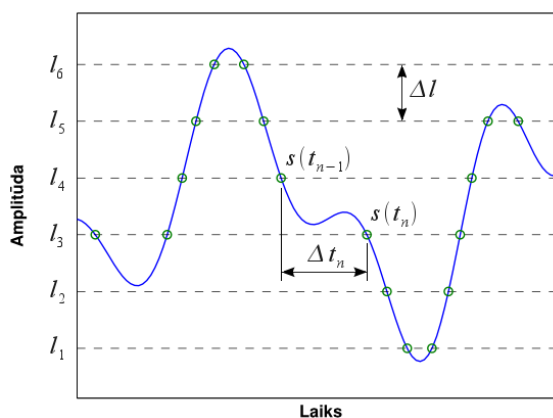


3.9. Runas signāla $x(t)$ aproksimācija ar EFS un FS rindām: a) signāls $x(t)$ un tā maksimālā momentānā frekvence $\hat{f}_{max}(t)$ (melnā līnija), b) signāla fragmenta STFT laika-frekvences sadalījums un no tā iegūtā frekvence $\hat{f}_{max}(t)$, c) ar EFS rindu aprēķinātā signāla aproksimācija $\hat{x}(t)$ (pelēkā līnija) un kļūdas signāls $x(t) - \hat{x}(t)$ (melnā līnija) pie aproksimācijas kļūdas $\varepsilon = 0.002$, d) signālu $x(t) - \hat{x}(t)$ un $x(t)$ enerģiju attiecības $r(N)$ atkarība no vidējā EFS un FS koeficientu skaita sekundē, e) EFS koeficientu skaita procentuālie samazinājumi Δ un $\tilde{\Delta}$ salīdzinājumā ar FS koeficientu skaitu pie vienādām ε vērtībām

No 3.9. attēla izriet signālatkarīgās pieejas ievērojams pārkums salīdzinājumā ar klasisko Furjē rindu. To parāda (d) un (e) līknes, no kurām (d) atbilst aproksimācijas kļūdas signāla $x(t) - \hat{x}(t)$ un oriģinālā signāla $x(t)$ enerģiju attiecībai $r(N)$ atkarībā no EFS un FS koeficientu skaita $2N + 1$, kas izdalīts ar signāla garumu, tādējādi iegūstot vidējo koeficientu (nolašu) skaitu sekundē, kas reprezentē signālu, savukārt (e) līknes parāda EFS koeficientu skaita procentuālu samazinājumu salīdzinājumā ar FS rindu pie vienādām enerģiju attiecībām ε . Līkne $\tilde{\lambda}$ atbilst gadījumam, kad pie EFS koeficientu skaita pieskaita vēl joslā $\omega \in [-500\pi, 500\pi]$ ierobežotas funkcijas $\tilde{f}_{max}(t)$ nolašu skaitu M .

4. LĪMEŅU-ŠĶĒRSOJUMU DISKRETIZĀCIJA

Darba ceturtajā nodaļā ir apskatīta līmeņu-šķērsojumu (LC: Level-crossing) diskretizācija, saskaņā ar kuru signāla nolases tiek ņemtas signāla un iepriekš uzdotu līmeņu šķērsojumu vietās (4.1. attēls) [2].



4.1. att. Līmeņu-šķērsojumu diskretizācija – signāla $s(t)$ nolāšu $s(t_n)$ laika momenti t_n sakrīt ar $s(t)$ un līmeņu l_1, l_2, l_3, \dots šķērsojumu vietām

LC pārveidojuma rezultātā iegūst laikā nevienmērīgi izvietotas nolases, attālumi starp kurām ir atkarīgi ne tikai no uzdotajiem līmeņiem, bet arī no signāla maksimālās momentānās frekvences. Šāda pieeja ļauj vienkāršot datu iegūvi, bet sarežģītāku padara to pēcstrādi, ko atkarībā no pielietojuma var veikt gan ar asinhronām sistēmām [22], [V], gan ar sinhronām sistēmām, ja vien pirms tam ir veikts signāla pārrēķins no LC nolasēm uz laikā vienmērīgi izvietotām nolasēm. Otrajā gadījumā signālapstrādes iespējas kļūst plašākas, tāpēc nodaļā tiek apskatīta signālu atjaunošanu no LC nolasēm [VII], [IX], [X], [XI], [XII], [XIV]. Saistībā ar to autors:

- 1) izstrādājis metodes signālu maksimālās momentānās frekvences noteikšanai no LC nolasēm;
- 2) formulējis pietiekamo nosacījumu signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, saskaņā ar kuru atjaunošana ir iespējama pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli, kas ir klasiskais ierobežojums literatūrā sastopamajām metodēm [6], [7], [16];
- 3) atbilstoši formulētajam nosacījumam piedāvājis vairākas metodes signālu atjaunošanai no LC nolasēm, kuras visas var realizēt saskaņā ar divām pieejām – sākumā veic transformētā laika signāla atjaunošanu un tad ar inverso pārveidojumu iegūst pašu signālu (laika transformācijai un inversajam pārveidojumam izmanto no LC nolasēm

iegūto maksimālo momentāni frekvenci), vai arī – ar pirmajā gadījumā lietoto metožu modificētajām versijām veic signāla tiešu atjaunošanu;

- 4) ar vairākiem signālu atjaunošanas piemēriem veicis izstrādāto metožu pārbaudi un iegūto rezultātu salīdzinājumus, kas ļauj secināt, ka signālatkarīgās teorijas pielietojums LC gadījumā paaugstina signālu atjaunošanas precizitāti.

Precīzas atjaunošanas pietiekamais nosacījums. Signālu atjaunošana no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm $s(t_n)$ ne vienmēr ir vienkārši atrisināms uzdevums. Parasti tiek apskatītas noteiktas signālu klases, kurām izstrādātie algoritmi darbojas tikai pie noteiktiem nosacījumiem, un tāda universāla paņēmiena, kas der visiem gadījumiem, nav [20]. Kā parādīts darbos [3], [8], [20], tad frekvenču joslā $\omega \in [-\Omega, \Omega]$ ierobežotu signālu precīza atjaunošana ir iespējama, ja vidējā to diskretizācijas frekvence $\bar{f}_d > \Omega/\pi$, līdz ar to precīzas atjaunošanas pietiekamais nosacījums ir [6], [7], [16]:

$$\Delta t_{max} = \sup_{n \in N} (t_n - t_{n-1}) < \frac{\pi}{\Omega}. \quad (4.1)$$

LC gadījumā problēma ir tā, ka nosacījuma (4.1) izpildi signālam ar laikā mainīgu spektrālo sastāvu pie noteikta līmeņu izvietojuma $l_1 < l_2 < \dots < l_M$ ir grūti prognozēt, ko nosaka attālumu $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ atkarība no paša signāla. Jo blīvāk būs izvietoti līmeņi l_m , jo lielāka būs varbūtība, ka (4.1) izpildīsies, bet vienlaikus mazāka kļūs LC pārveidojuma energoefektivitāte, ko noteiks vidējais LC nolašu skaits sekundē.

Lai izvairītos no pārlietu liela nolašu daudzuma, nosacījumu (4.1) raksta nevis signālam $s(t)$, bet gan transformēta laika signālam $y(u)$, kas parādīts 4.2. attēlā. Ja signāla $y(u)$ FT spektrs $F[y(u)]$ ir frekvenču joslā $[-\Omega_g, \Omega_g]$ ierobežots, tad pietiekamais nosacījums $y(u)$ precīzai atjaunošanai no nolasēm $y(u_n)$ ir:

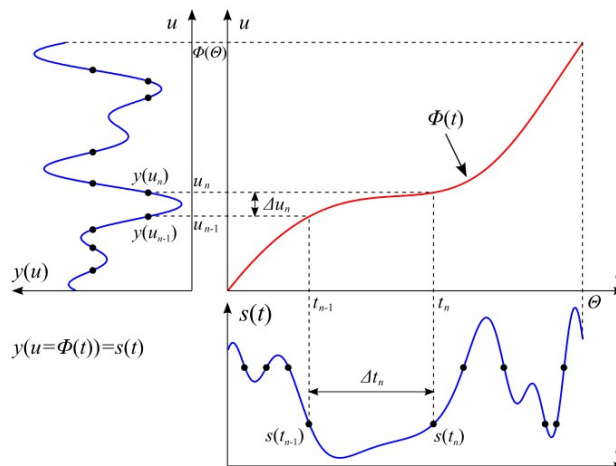
$$\Delta u_{max} = \sup_{n \in N} (u_n - u_{n-1}) < \frac{\pi}{\Omega_g}. \quad (4.2)$$

Rakstot šo formulējumu signālam $y(u)$, kura argumenta u vietā liek $u = \Phi(t)$ (funkcija $\Phi(t)$ definēta ar izteiksmi (3.2)), un ievērojot sakarību $y(\Phi(t)) = s(t)$, iegūst pietiekamo nosacījumu signāla $s(t)$, kura EFT spektrs $S(\omega_g) = \tilde{F}[s(t), g(t)]$ ir joslā $\omega_g \in [-\Omega_g, \Omega_g]$ ierobežots, precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm $s(t_n)$ [1]:

$$\sup_{n \in N} (\Phi(t_n) - \Phi(t_{n-1})) < \frac{\pi}{\Omega_g}. \quad (4.3)$$

Salīdzinot (4.3) ar (4.1), var secināt, ka maksimālais attālums Δt_{max} starp signāla

nolasēm šajā gadījumā var ievērojami pārsniegt Naikvista soli π/Ω , un to nosaka funkcija $\Phi(t)$. Viens tāds piemērs parādīts 4.2. attēlā – liels laika intervāls Δt_n starp signāla $s(t)$ LC nolasēm $s(t_{n-1})$ un $s(t_n)$ ar funkcijas $\Phi(t)$ pārveidojumu pārvēršas par mazu transformētā laika $u = \Phi(t)$ intervālu Δu_n starp tām pašām signāla $y(u)$ LC nolasēm $y(u_{n-1}) = s(t_{n-1})$ un $y(u_n) = s(t_n)$.

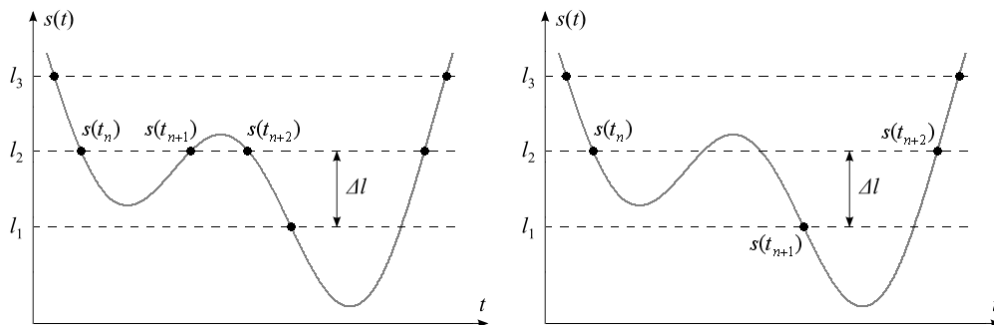


4.2. att. Signāla $s(t)$ transformēta laika $u = \Phi(t)$ signāls $y(u)$, kuram izpildās: $y(\Phi(t)) = s(t)$

Metodes funkcijas $\Phi(t)$ noteikšanai un signālu atjaunošanai no LC nolasēm, kā arī diskretizācijas un atjaunošanas piemērus var atrast darba pilnajā versijā.

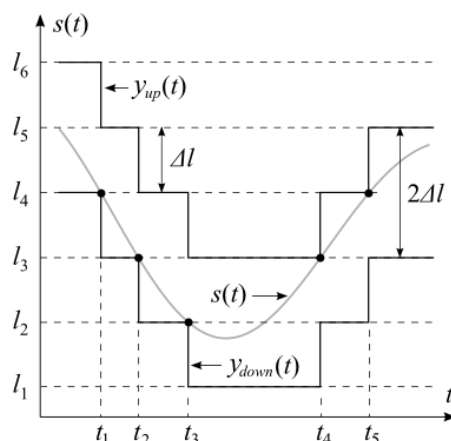
5. LC DISKRETIZĀCIJAS PRAKTISKĀ REALIZĀCIJA

5. nodaļā ir aprakstīta LC diskretizācijas praktiskā realizācija. Lai samazinātu trokšņa ietekmi un izvairītos no pārāk īsiem laika intervāliem starp secīgām nolāsēm, kas var radīt kļūdu pārveidojumā, tad katru nākamo LC nolasi ņem tikai tad, kad signāla izmaiņa no iepriekšējās nolases vērtības sasniedz noteiktu delta sliekšni Δl (5.1. attēls pa labi).



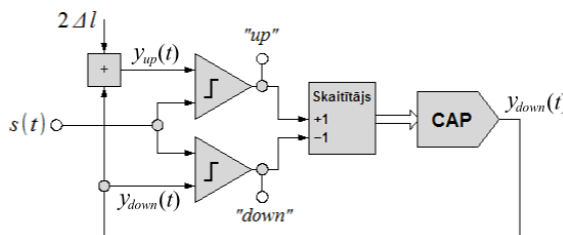
5.1. att. Līmeņu-šķērsojumu (pa kreisi) un delta-izmaiņu (pa labi) diskretizācija

Šādu delta-izmaiņu pārveidojumu var realizēt pēc sekojoša principa (5.2. attēls). Ieejas signāls $s(t)$ laika intervālā līdz t_1 atrodas starp diviem līmeņiem: $y_{down}(t)=l_4$ un $y_{up}(t)=l_4 + 2\Delta l=l_6$. Signālam samazinoties un laika momentā t_1 šķērsojot apakšējo līmeni l_4 , signālu $y_{down}(t)$ un $y_{up}(t)$ vērtības tiek samazinātas par Δl , kā rezultātā signāls laika intervālā no t_1 līdz t_2 atrodas starp jaunajiem līmeņiem $y_{down}(t)=l_3$ un $y_{up}(t)=l_3 + 2\Delta l=l_5$. Līdzīgā veidā tiek mainītas $y_{down}(t)$ un $y_{up}(t)$ vērtības laika momentos t_2 un t_3 , kā rezultātā signāls laika intervālā no t_3 līdz t_4 atrodas starp līmeņiem $y_{down}(t)=l_1$ un $y_{up}(t)=l_1 + 2\Delta l=l_3$. Savukārt laika momentos t_4 un t_5 , kad signāls pieaug un šķērso augšējos līmeņus l_3 un l_4 , $y_{down}(t)$ un $y_{up}(t)$ vērtības tiek palielinātas par Δl . Rezultātā signāls $s(t)$ praktiski vienmēr atrodas starp līmeņiem $y_{down}(t)$ un $y_{up}(t)$, kurus šķērsojot tiek fiksētas signāla LC nolases.



5.2. att. Delta-izmaiņu praktiskās realizācijas darbības principa ilustrējums

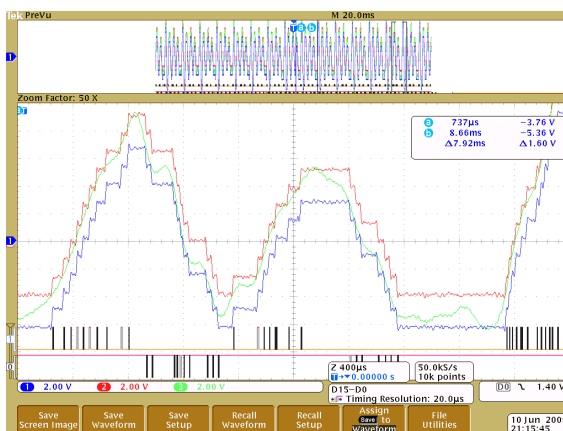
Aprakstīto delta-izmaiņu pārveidojuma principu var realizēt saskaņā ar 5.3. attēlā parādīto blokshēmu.



5.3. att. Delta-izmaiņu diskretizācijas blokshēma

Ieejas signāls $s(t)$ tiek pievadīts diviem komparatoriem, kuri to salīdzina ar sprieguma līmeņiem $y_{down}(t)$ un $y_{up}(t) = y_{down}(t) + 2\Delta l$, turklāt $y_{down}(t) < s(t) < y_{up}(t)$. Ja signāls pieaug un šķērso līmeni $y_{up}(t)$, tad nostrādā augšējais komparators, kas skaitītāja izejas ciparu vērtību palielina par “+1”, kā rezultātā CAP izejas spriegums $y_{down}(t)$ palielinās par Δl , un izpildās nevienādība $y_{down}(t) < s(t) < y_{up}(t)$. Ja signāls samazinās un šķērso līmeni $y_{down}(t)$, tad nostrādā apakšējais komparators, kas skaitītāja izejas ciparu vērtību samazina par “-1”, kā rezultātā CAP izejas spriegums $y_{down}(t)$ samazinās par Δl , un atkal izpildās nevienādība $y_{down}(t) < s(t) < y_{up}(t)$.

5.3. attēlā parādītajai blokshēmai atbilstošā elektroniskā shēma dota promocijas darba 8. pielikumā. Pēc līdzības ar to ir izgatavota iespiedplate, kurā realizēti 16 diskretizācijas līmeņi, kas vienmērīgi izvietoti diapazonā no -10V līdz +10V. Ar osciloskopu uzņemtais runas signāla delta-izmaiņu diskretizācijas rezultāts parādīts 5.4. attēlā. Kā tika secināts no mērījumiem, tad izstrādātā plate spēj diskretizēt signālus joslā līdz 10 kHz, bet pie lielākām frekvencēm līmeņi $y_{up}(t)$ un $y_{down}(t)$ vairs nespēj izsekot signāla izmaiņām.



5.4. att. Ar osciloskopu uzņemtie runas signāla (vidējā līnija starp trepveida līnijām) delta-izmaiņu diskretizācijas signāli: apakšējā trepveida līnija atbilst CAP izejai $y_{down}(t)$, augšējā – signālam $y_{up}(t)$, un zemāk redzamās impulsu virknes – “up” un “down” ciparu signāliem

Nobeigums

Promocijas darba mērķis bija izpētīt un teorētiski pamatot, kā atkarībā no signāla laikā mainīgās aktivitātes (spektrālā sastāva) izvēlēties nolašu izvietojumu laikā, lai tās precīzi reprezentētu analogo signālu, kā arī izpētīt, vai šīs zināšanas var izmantot signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas iegūtas signālatkarīgu pārveidojumu rezultātā.

Atbilstoši mērķa sasniegšanai izvirzītajam uzdevumam: izstrādāt teoriju un metodes signālu signālatkarīgai diskretizācijai un atjaunošanai, autors ir ieguvis šādus galvenos rezultātus:

1. Ieguvis paplašināto Furjē rindu periodisku signālu izvērsei trigonometrisku funkciju rindā ar laikā mainīgām frekvencēm, kas ļauj ar samazinātu koeficientu skaitu reprezentēt nestacionārus signālus, kuru spektrālie sastāvi ir laikā mainīgi (to demonstrē 3.5.2. apakšnodaļā parādītie piemēri).
2. Formulējis paplašināto nolašu teorēmu signālu diskretizācijai saskaņā ar brīvi izvēlētu monotoni augošu funkciju $\Phi(t)$.
3. Izstrādājis signāla maksimālās momentānās frekvences $\hat{f}_{max}(t)$ noteikšanas metodes, lai tālāk šo frekvenci izmantotu signālu signālatkarīgai diskretizācijai saskaņā ar paplašināto nolašu teorēmu: no $\hat{f}_{max}(t)$ atrod $\Phi(t)$, bet no $\Phi(t)$ – nolašu laika pozīcijas $t_n = \Phi^{-1}(n \gamma)$. Rezultātā tiek atbildēts uz darba mērķi izvirzīto pirmo jautājumu par nolašu izvietojumu atkarībā no signāla laikā mainīgā spektrālā sastāva, ko reprezentē funkcija $\hat{f}_{max}(t)$.
4. Balstoties uz paplašināto nolašu teorēmu, formulējis pietiekamo nosacījumu (4.3) signālu precīzai atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas kļūst iespējams pat tad, ja maksimālais laika intervāls starp secīgām nolasēm pārsniedz Naikvista soli. Šis rezultāts ļauj atbildēt uz darba mērķi izvirzīto otro jautājumu par izstrādātās teorijas pielietojumu signālu atjaunošanai no laikā nevienmērīgi izvietotām nolasēm, kas iegūtas signālatkarīgu pārveidojumu rezultātā.
5. Atbilstoši formulētajam nosacījumam (4.3) piedāvājis vairākas metodes signālu atjaunošanai no LC nolasēm, viena no kurām (mazāko kvadrātu metode ar nosacījumiem) izmanto zināšanas par signāla ierobežotajiem vērtību apgabaliem laika intervālos starp secīgām LC nolasēm.
6. Veicis izstrādāto signālatkarīgo metožu simulācijas MATLAB vidē un sniedzis iegūto rezultātu novērtējumu un secinājumus.

7. Izstrādājis signālatkarīga analogs-ciparu pārveidotāja iespiedplati, kas darbojas pēc līmeņu-šķērsojumu diskretizācijas principa.

Ņemot vērā uzskaitītos rezultātus, var secināt, ka promocijas darbā izvirzītais mērķis ir sasniegts.

Literatūra

1. Allen R.L., Mills D.W. *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure*. - Wiley, 2004. - p. 966.
2. Allier E., Sicard G., Fesquet L. *A New Class of Asynchronous A/D Converters Based on Time Quantization*// *Proc. Ninth International Symposium on Asynchronous Circuits and Systems*. - 2003. - pp. 196–205.
3. Beutler F.J. *Error Free Recovery from Irregularly Spaced Samples*// *SIAM Review*. - 1966. - vol. 8(3). - pp. 328–335.
4. Bilinskis I. *Digital Alias-free Signal Processing*. - UK: Wiley, 2007. - 454 p.
5. Donoho D. *Compressed sensing*// *IEEE Trans. Inform. Theory*. - 2006. - vol. 52(4). - pp. 1289–1306.
6. Feichtinger H.G., Gröchening K. *Theory and practice of irregular sampling*// Benedetto J.J., Frazier M.W. *Wavelets: Mathematics and Applications*. - Boca Raton: CRC Press, 1994. - pp. 305–363.
7. Gröchening K. *Reconstruction algorithms in irregular sampling*// *Math. Comp.* - 1992. - vol. 59(199). - pp. 181–194.
8. Jerri A.J. *The Shannon sampling theorem – Its various extensions and applications: A tutorial review*// *Proc. IEEE*. - 1977. - vol. 65. - pp. 1565–1596.
9. Kinniment D.J., Gao B., Yakovlev A.V., Xia F. *Towards asynchronous A-D conversion*// *Proc. Fourth International Symposium on Advanced Research in Asynchronous Circuits and Systems*. - 1998. - pp. 206–215.
10. Kinniment D.J., Yakovlev A.V., Gao B. *Synchronous and asynchronous A-D conversion*// *IEEE Trans. on Very Large Integration Systems*. - 2000. - vol. 8(2). - pp. 217–220.
11. Kotel'nikov V. A. *On the transmission capacity of “ether” and wire in electrocommunications*// *Izd. Red. Upr. Svyazzi RKKA (Moscow)*. - 1933.
12. Kramer H.P. *A generalized sampling theorem*// *J. Math. Phys.* - 1959. - vol. 38. - pp. 68–72.
13. Kurchuk M., Tsvividis Y. *Digital Signal Processing in Continuous Time*. - *CMOSET 2010 Circuits Track Presentation Slides: CMOS Emerging Technologies, 2010*.
14. Landau H.J. *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*// *Acta Math.* - 1967. - vol. 117. - pp. 37–52.
15. Lazar A.A., Simonyi E.K., Tóth L.T. *Time Encoding of Bandlimited Signals, an Overview*//

- Proc. ICTSM 2005. - 2005, Dallas, USA.*
16. Lazar A.A., Tóth L.T. *Perfect recovery and sensitivity analysis of time encoded bandlimited signals// IEEE Trans. Circuits and Systems-I: Regular Papers. - 2004. - vol. 51(10). - pp. 2060–2073.*
 17. Lee H., Bien Z. *Linear Time-Varying Filter with Variable Bandwidth// Proc. ISCAS 2006. - 2006, Kos, Greece.*
 18. Mallat S. *A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet representation// IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. - 1989. - vol. 11. - pp. 674–693.*
 19. Martin A.J., Nystrom M., Wong C.G. *Three generations of asynchronous micro-processors// IEEE Design and Test of Computers. - 2003. - vol. 20(6). - pp. 9–17.*
 20. Marvasti F. *Nonuniform Sampling Theory and Practice. - New York: Kluwer academic/Plenum Publishers, 2001. - 924 p.*
 21. Papoulis A. *Generalized sampling expansion// IEEE Trans. Circuits Syst. - 1977. - vol. 24. - pp. 652–654.*
 22. Qaisar. S.M. *Signal Driven Sampling and Processing: A Promising Approach for Computationally Efficient Adaptive Rate Solutions// PhD thesis . - Grenoble INP, Laboratory TIMA, Group CIS. - 2009. - 233. p.*
 23. Raghavendra C.S., Sivalingam K.M., Znati T.F. *Wireless sensor networks. - New York: Springer, 2004. - 426 p.*
 24. Shannon C.E. *Communication in the presence of noise// Proc. of the IRE. - 1949. - vol. 37(1). - pp. 10–21.*
 25. Smith S.C., Di J. *Designing asynchronous circuits using NULL convention logic (NCL). - Morgan & Claypool Publishers, 2009. - 86 p.*
 26. Sparsø J., Furber S. *Principles of Asynchronous Circuit Design - A Systems Perspective. - Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. - 360 p.*
 27. Unser M. *Sampling – 50 years after Shannon// Proc. of the IEEE. - 2000. - vol. 88(4). - pp. 569–587.*
 28. Van Berkel C.H., Josephs M.B., Nowick S.M. *Scanning the technology: Applications of asynchronous circuits// Proc. IEEE. - 1999. - vol. 87(2). - pp. 223–233.*
 29. Vetterli M., Marziliano P., Blu T. *Sampling signals with finite rate of innovation// IEEE Trans. Sign. Proc. - 2002. - vol. 50. - pp. 1417–1428.*
 30. Whittaker J. M. *The Fourier theory of the cardinal functions// Proc. Math. Soc. Edinburgh. - 1929. - vol. 1. - pp. 169–176.*